Сб. "Асимптотические методы математической физики" Киев, Наукова думка, 1988

ния роботом рабочих операций. Результаты расчетов по изложенной методике динамики роботов с упругими звеньями или шарнирами изложены в [11—14].

1. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М. : Наука, 1964.— 432 с.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных систем.— М. : Наука, 1973.— 272 с.
3. *Черноусько Ф. Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1983.— № 4.— С. 101—113.
4. *Черноусько Ф. Л., Шамаев А. С.* Эволюционные уравнения для медленных переменных в теории сингулярно возмущенных систем // Докл. АН СССР.— 1984.— 277, № 2.— С. 315—318.
5. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость.— М. : ВЦ АН СССР, 1968.— 230 с.
6. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1973.— № 4.— С. 33—44.
7. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Прикл. математика и механика.— 1978.— 42, № 1.— С. 34—42.
8. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д.* Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1978.— № 5.— С. 29—34.
9. *Черноусько Ф. Л.* О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // Там же.— 1980.— № 1.— С. 22—26.
10. *Черноусько Ф. Л., Шамаев А. С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Там же.— 1983.— № 3.— С. 33—42.
11. *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1981.— № 5.— С. 141—152.
12. *Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1984.— № 2.— С. 51—58.
13. *Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* Динамика упругого манипулятора при заданных управляющих моментах или движениях перемещающего груза // Там же.— 1984.— № 5.— С. 19—25.
14. *О влиянии* упругой податливости конструкции роботов на их динамику / В. Г. Градецкий, А. А. Гукасян, А. И. Грудев, Ф. Л. Черноусько // Там же.— 1985.— № 3.— С. 63—71.

УДК 517.91

Б. В. ЧИРИКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АДИАБАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Адиабатические задачи, т. е. теоретический анализ действия адиабатического возмущения на колебательную систему, встречаются во многих приложениях классической и квантовой динамики. Примером может служить задача Будкера [1] о колебании заряженной частицы в адиабатической магнитной ловушке, предложенной им в начале 50-х годов для удержания горячей термоядерной плазмы. Помимо очевидного прикладного значения подобных задач исследование адиабатической инвариантности переменных действия представляет для физики интерес и в принципиальном отношении, поскольку речь здесь идет об одном из законов сохранения, хотя бы и приближением. Не удивительно, что исследованию условий и точности сохранения адиабатических инвариантов посвящено огромное число работ (обширную, хотя и далеко не исчерпывающую библиографию можно найти, например, в [2]).

Адиабатические задачи можно разбить на два класса. В первом из них адиабатическое возмущение эффективно действует в течение конечного интервала времени, т. е. является импульсным, однократным. Например, некоторый параметр системы монотонно изменяется от одного асимптотического значения ($t \to -\infty$) до другого ($t \to +\infty$). Для таких задач, как известно, основным условием адиабатической инвариантности является медленность возмущения по сравнению с характерными частотами системы. В классе аналитических функций нарушение адиабатичности колебаний экспоненциально мало по параметру медленности и потому, как правило, не существенно. Ниже мы рассмотрим другой, более интересный и более сложный класс адиабатических задач, в которых возмущение является стационарным, многократным (периодическим или почти периодическим). Примером может служить движение частицы в упомянутой выше адиабатической магнитной ловушке. Это — консервативная гамильтонова система с несколькими степенями свободы, отношение частот колебаний в которой очень мало (или велико). В этом случае медленность возмущения (его низкая частота) еще не гарантирует сохранения адиабатических инвариантов на достаточно большом интервале времени, поскольку малые изменения переменных действия на каждом периоде возмущения могут накапливаться. Как и во многих других задачах теории колебаний, на первый план здесь выступают резонансы (линейные или нелинейные).

Специфическая трудность стационарных адиабатических задач в теории нелинейных колебаний состоит в том, что здесь нельзя прямо использовать мощные асимптотические методы теории возмущений, и в частности простой и эффективный метод усреднения [3] (см (12)), поскольку разложение по степеням малого параметра медленности ε невозможно. Как обойти эту трудность? Идея одного из подходов, которому и посвящена эта статья, состоит в том, чтобы ввести новый, «хороший» параметр адиабатичности ξ (см. (16)), который бы явно включал в себя неаналитическую экспоненту типа (12), вместо исходного, «плохого» параметра ε. Подобный метод был развит в работе [4].

Адиабатические колебания. Рассмотрим нелинейный осциллятор с двумя степенями свободы, заданный гамильтонианом:

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{1}{2}[p_x^2 + p_y^2 + (1 + \varepsilon^2 x^2)^2 y^2], \tag{1}$$

где ε — малый параметр адиабатичности, точнее, параметр медленности. Система (1) качественно моделирует движение заряженной частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке. Эта сторона вопроса, также как и другие более реалистические модели динамики частиц в магнитном поле, подробно рассмотрена в обзоре [5]. В настоящей статье мы исследуем собственно модели (1) в качестве относительно «простого» примера стационарных адиабатических колебаний.

При $\varepsilon = 0$ движение финитно только по y, тогда как $p_x = \text{const}$. Покажем прежде всего, что в адиабатическом приближении ($\varepsilon \to 0$) движение становится финитным также по x, т. е. представляет собой стационарные колебания. Для этого введем вспомогательный гамильтониан

$$H_y^0(p_y, y;\ x) = \frac{p_y^2}{2} + \frac{\omega_y^2(\varepsilon x)\, y^2}{2} = \omega_y(\varepsilon x)\, I_y, \tag{2}$$

в котором мы рассматриваем x как параметр. Тогда вспомогательная система (2) есть гармонический осциллятор с переменной действия I_y и частотой $\omega_y(\varepsilon x) = 1 + (\varepsilon x)^2$. В адиабатическом приближении $I_y = \text{const}$ и полный гамильтониан (1) принимает вид

$$H \to H_x^0(p_x, x) = \frac{p_x^2}{2} + \omega_y(\varepsilon x)\, I_y. \tag{3}$$

Он описывает только движение по x, которое имеет характер ограниченных колебаний при любом $\varepsilon > 0$. Вводя действие I_x, запишем (3) в виде

$$H^0(I_x, I_y) = H_x^0(p_x, x, I_y) = I_y + \varepsilon I_x \sqrt{2I_y}. \tag{4}$$

Основная проблема здесь состоит в том, будет ли движение по x финитным на самом деле, а не только в адиабатическом приближении. Это и есть задача Будкера [1]. Заметим, что сохранение энергии в данном случае не помогает, поскольку эквипотенциалы исходной системы ($y\,(1 + \varepsilon^2 x^2) = \text{const}$) не замкнуты.

Решение этой задачи разобъем на два этапа. Сначала найдем изменение действия I_y на полупериоде медленных колебаний по x. Величина $\xi \sim \Delta I_y / I_y$ и будет новым, «хорошим» параметром адиабатичности. Поэтому эту часть задачи нужно решить каким-то прямым (неасимптотическим) методом. Зато на втором этапе, исследуя динамику системы (1) с параметром ξ на произвольном интервале времени, мы можем использовать, например, просто метод усреднения или любой вариант асимптотических разложений.

Невозмущенная система. Для выполнения этой программы нужно прежде всего правильно выбрать невозмущенную систему. Если в качестве такой системы взять, например, частный (и вполне реальный) случай системы (1) при $\varepsilon = 0$, то вычисление ξ окажется просто невозможным, так как в этом случае никаких колебаний по x нет. Такая невозмущенная система является вырожденной, а ее (инфинитное) движение качественно отличается от возмущенного (финитного).

Для того чтобы обойти это затруднение, выберем в качестве невозмущенной вспомогательную систему (4). Движение этой системы, строго говоря, никогда не осуществляется в исходной системе (1), но может быть близко к нему, а главное, оно качественно такое же, т. е. финитное. Адиабатическое приближение (4) для рассматриваемой классической задачи соответствует хорошо известному методу Борна — Оппенгеймера в квантовой динамике, который недавно был вновь использован и для некоторых классических задач [6].

Колебания выбранной невозмущенной системы (4) являются почти гармоническими (с точностью до медленного изменения частоты колебаний по y из-за колебаний по x). Тем не менее эта система существенно нелинейна, поскольку ее частоты

$$\omega_x = \frac{\partial H^0}{\partial I_x} = \varepsilon\sqrt{2I_y}; \quad \langle\omega_y\rangle = \frac{\partial H^0}{\partial I_y} = 1 + \frac{\varepsilon I_x}{\sqrt{2I_y}} \tag{5}$$

зависят от переменных действия. Частота $\langle\omega_y\rangle$ равна среднему значению «мгновенной» частоты $\omega_y(\varepsilon x)$ по x-колебаниям [5]. Это можно показать, используя общее соотношение

$$\frac{\partial I(\mathscr{H}, \mu)}{\partial\mu} = -\frac{1}{\omega}\left\langle\frac{\partial\mathscr{H}(p, x, \mu)}{\partial\mu}\right\rangle, \tag{6}$$

где μ — некоторый параметр, а угловые скобки обозначают усреднение при $\mu = \mathrm{const}$. Полагая здесь $\mathscr{H} = H_x^0$, $\mu = I_y$ и используя закон сохранения $H^0 = \mathrm{const}$, получаем

$$\langle\omega_y\rangle = -\omega_x\frac{\partial I_x(H^0, I_y)}{\partial I_y} = \left\langle\frac{\partial H_x^0(p_x, x, I_y)}{\partial I_y}\right\rangle.$$

Адиабатическое возмущение. Дальше можно проводить исследования по двум направлениям. Первое [5] — найти точное уравнение для I_y. В общем случае это может быть сделано следующим образом [7]. Считая в (2) $x(t)$ заданной функцией времени и используя общие соотношения $d\mathscr{H}/dt = \partial\mathscr{H}/\partial t$ и (6), находим

$$\dot I_y(H_y^0, x(t)) = \frac{\partial I_y}{\partial H_y^0}\dot H_y^0 + \frac{\partial I_y}{\partial x}\dot x =$$

$$= \frac{\dot x}{\omega_y}\left(\frac{\partial H_y^0(p_y, y; x)}{\partial x} - \left\langle\frac{\partial H_y^0(p_y, y; x)}{\partial x}\right\rangle\right) = -I_y\frac{\dot\omega_y}{\omega_y}\cos(2\theta). \tag{7}$$

Последнее выражение относится к рассматриваемой системе (1), а фаза θ определяется из условий

$$y \equiv \sqrt{\frac{2I_y}{\omega_y}}\sin\theta; \quad p_y \equiv \sqrt{2I_y\omega_y}\cos\theta. \tag{8}$$

Второе направление — каноническое преобразование переменных $p_x, p_y, x, y \to I_x, I_y, \theta_x, \theta_y$ с помощью производящей функции

$$F(x, y, I_x, I_y) = \int dy\sqrt{2\left[H_y^0 - \frac{\omega_y^2(\varepsilon x)\,y^2}{2}\right]} + \int dx\sqrt{2\,[H^0 - \omega_y(\varepsilon x)\,I_y]}. \tag{9}$$

Уточненный адиабатический инвариант. Уравнение (7) показывает, что невозмущенное действие I_y (также как и I_x) сохраняется только с точностью порядка ε. Асимптотическое разложение по ε можно продолжить. В любом порядке поправка δI_y является периодической функцией фаз θ_x, θ_y и, следовательно, не может накапливаться. Иначе можно сказать, что изменение уточненного инварианта $I_y^* = I_y - \delta I_y$ убывает при $\varepsilon \to 0$ быстрее любой степени ε, т. е.

экспоненциально. В достаточно общем случае это было выяснено в свое время М. Крускалом [8].

Простой способ исключения всех этих малых и несущественных поправок состоит в том, чтобы перейти от дифференциальных уравнений движения к отображению на полупериоде колебаний по x [4]. Если выбрать при этом начальные условия движения (I_x, I_y или H^0, I_y) так, чтобы отношение частот $\langle\omega_y\rangle/\omega_x$ равнялось целому кратному π, т. е. чтобы изменение фазы θ_y, а следовательно, и фазы $\vartheta = 2\theta$ адиабатического возмущения

$$\Delta\vartheta = 2\pi \frac{\langle\omega_y\rangle}{\omega_x} = \frac{\pi}{\varepsilon}\left[\frac{2H^0}{(2I_y)^{3/2}} + \frac{1}{(2I_y)^{1/2}}\right] = 0 \mod 2\pi, \tag{10}$$

то поправка δI_y выпадает и вместо очень сложной величины I_y^* можно использовать просто невозмущенное действие I_y. Соотношение (10) определяет, очевидно, условие точного резонанса между двумя степенями свободы, когда квазипериодические колебания становятся периодическими.

Резонансный параметр адиабатичности. Проинтегрируем теперь уравнение (7) с невозмущенными $\omega_y(t)$ и $\theta(t)$. На полупериоде колебаний по x это вполне возможно, а для рассматриваемой задачи и относительно элементарно. Соответствующая техника интегрирования подробно описана в [5]. Здесь мы упомянем только, что контур интегрирования в плоскости комплексной фазы θ замыкается по двум вертикальным прямым $\operatorname{Re}\theta = \pm\pi/2$. В точном резонансе (10) их вклады взаимно уничтожаются, и интеграл определяется особенностью $\omega_y = 0$ в точке

$$x_p = \frac{i}{\varepsilon}\ ; \quad \theta_p = \theta_0 + \int_0^{x_p} \frac{\omega_y dx}{\dot{x}} \approx \theta_0 + \frac{2i}{3\varepsilon\sqrt{2H_0}}\ , \tag{11}$$

где $\theta_0 = \operatorname{Re}\theta_p$ — значение действительной фазы $\theta(t)$ при $x = 0$. Для упрощения формул мы приняли в последнем выражении $\dot{x} \approx \sqrt{2H^0}$, или $I_y\omega_y \leqslant I_y \leqslant H^0$ (общий случай рассмотрен в [5]). Производя необходимые вычисления, окончательно получаем

$$\frac{\Delta I_y}{I_y} \approx \Delta \ln I_y = -\pi \operatorname{Re}(ie^{2i\theta_p}) = \pi e^{-\frac{4}{3\varepsilon\sqrt{2H^0}}} \sin(2\theta_0). \tag{12}$$

В качестве нового малого параметра возьмем амплитуду величины $\Delta \ln I_y$, т. е.

$$\xi = \pi e^{-\frac{4}{3\varepsilon\sqrt{2H^0}}}, \tag{13}$$

и будем называть ее по понятным причинам резонансным параметром адиабатичности.

Отображение. Новый параметр ξ улавливает основной неасимптотический эффект адиабатического возмущения и поэтому теперь по нему можно производить обычное асимптотическое разложение и использовать простой метод усреднения. В частности, можно просто отбросить нерезонансные малые поправки δI_y и вычислять изменение фазы θ_0 между двумя последовательными прохождениями положения $x = 0$, во-первых, по невозмущенному отношению частот (10), и во-вторых, для любых значений I_y, а не только в точном резонансе. Вместе с соотношением (12) это дает возможность описывать долговременную динамику рассматриваемой системы с помощью канонического двухмерного отображения $\Lambda,\ \vartheta \to \bar\Lambda,\ \bar\vartheta$, где $\Lambda = \ln I_y$; $\vartheta = 2\theta_0$ и

$$\bar\Lambda = \Lambda + \xi \sin\vartheta;$$

$$\bar\vartheta = \vartheta + \Delta\vartheta(H^0, \bar\Lambda);\ \Delta\vartheta(H^0, \Lambda) = \frac{\pi}{\varepsilon\sqrt{2}}\left(H^0 e^{-\frac{3\Lambda}{2}} + e^{-\frac{\Lambda}{2}}\right). \qquad (14)$$

При достаточно малом ε это отображение можно еще упростить, линеаризуя функцию $\Delta\vartheta(\Lambda)$ вблизи резонансного значения $\Lambda = \Lambda_r$, такого, что $\Delta\vartheta(\Lambda_r) = 0 \bmod 2\pi$ (10). Вводя новое действие

$$P = \left(\frac{d\Delta\vartheta}{d\Lambda}\right)_{\Lambda=\Lambda_r}(\Lambda - \Lambda_r) \equiv (\Delta\vartheta)'_r(\Lambda - \Lambda_r), \qquad (15)$$

получаем так называемое стандартное отображение

$$\bar P = P + K\sin\vartheta; \quad \bar\vartheta = \vartheta + \bar P \qquad (16)$$

с единственным параметром

$$K = \xi\,|(\Delta\vartheta)'_r|, \qquad (17)$$

который и определяет условия адиабатичности исходной системы (1). Стандартное отображение описывает динамику системы (14) локально по Λ, а значит, и динамику исходной модели (1) локально по I_y на энергетической поверхности.

Хаотическая адиабатичность. Исследованию системы (16) посвящено большое число работ (см., например, [4, 5, 9]). Динамика этой модели очень сложна и своеобразна. Прежде всего существует критическое значение параметра

$$K_c = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3H^0 + e^{\Lambda_c}}{\varepsilon}\exp\left[-\left(\frac{4}{3\varepsilon\sqrt{2H^0}} + \frac{3}{2}\Lambda_c\right)\right] \approx 1, \qquad (18)$$

такое, что при $K < K_c$ колебания P строго ограничены на любом интервале времени ($|\Delta P| \leqslant 2\sqrt{K}$). Изменение I_y при этом также ограничено и мало.

При заданных начальных условиях адиабатичность движения зависит от параметра медленности ε, который должен быть достаточно малым. При заданном ε адиабатичность определяется начальными условиями движения H^0, Λ, причем Λ должно быть достаточно большим: $\Lambda > \Lambda_c(H^0, \varepsilon)$. В принятом выше упрощающем предположении $I_y = e^\Lambda \ll H^0$ критическое значение

$$\Lambda_c \approx -\frac{8}{9\varepsilon\sqrt{2H^0}} + \frac{2}{3}\ln\left(\pi^2\frac{H^0}{\varepsilon}\right). \qquad (19)$$

Область адиабатичности ($K < K_c$) имеет весьма сложную и своеобразную структуру. Хотя движение здесь является глобально устойчивым ($|\Delta P| \leqslant 2\sqrt{K}$), оно может быть (в зависимости от начальных условий) и хаотическим. При $K \to K_c$ мера хаотических траекторий в фазовом пространстве системы достигает примерно 50 %. Такой необычный режим движения можно назвать хаотической адиабатичностью. В устойчивых областях адиабатический инвариант $\dot{I}_y$ становится точным. Для достаточно малого возмущения это строго доказано В. И. Арнольдом [10], который назвал такой случай вечной адиабатической инвариантностью.

В области $K > K_c$ движение для большинства начальных условий является хаотическим. Хотя оно и сохраняет колебательный характер, амплитуда колебаний по x неограниченно возрастает, а $I_y \to 0$ ($\Lambda \to -\infty$). Движение такого рода называется в небесной механике осциллирующим. В данном случае этот процесс является стохастическим и описывается некоторым диффузионным уравнением для фазовой плотности $\rho(I_y, t)$. Поскольку для нашей системы инвариантная эргодическая мера на энергетической поверхности [5]

$$\frac{d\mu(I_y, H^0)}{dI_y} = \frac{1}{\omega_x(I_y)} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2I_y}} \tag{20}$$

компактна (нормируема), то в процессе статистической релаксации фазовая плотность $\rho(I_y, t) \to \rho_s(I_y) \propto d\mu/dI_y$ стремится к равновесной. Последняя является сингулярной при $I_y = 0$, но интегрируемой.

Как показывает рассмотренный «простой» пример, условия адиабатичности нелинейных колебаний сложным образом зависят как от параметров системы, так и от начальных условий движения, а нарушение адиабатичности определяется взаимодействием нелинейных резонансов.

1. *Будкер Г. И.* Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками // Будкер Г. И. Собр. тр.— М. : Наука, 1982.— С. 72.
2. *Бакай А. С., Степановский Ю. П.* Адиабатические инварианты.— Киев : Наук. думка.— 1981.— 284 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 501 с.
4. *Чириков Б. В.* Проблема устойчивости движения заряженной частицы в магнитной ловушке // Физика плазмы.— 1978.— 4, вып. 3.— С. 521—541.
5. *Чириков Б. В.* Динамика частиц в магнитных ловушках // Вопр. теории плазмы.— 1984.— Вып. 13.— С. 3.
6. *Stefański K., Taylor H. S.* New approach to understading quasiperiodicaly in nonintegrable Hamiltonian systems // Phys. Rev.— 1981.— A31, N 5.— P. 2810–2820.
7. *Чириков Б. В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности.— Новосибирск, 1969.— 313 с.— (Препр. / СО АН СССР, Ин-т ядерной физики ; 69.267).
8. *Крускал М.* Адиабатические инварианты.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 89 с.
9. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика.— М. : Мир, 1984.— 528 с.
10. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике // Успехи мат. наук.— 1963.— 18, вып. 6.— С. 91—192.