

УДК 523.64

## ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА КОМЕТЫ ГАЛЛЕЯ

**В. В. ВЕЧЕСЛАВОВ и Б. В. ЧИРИКОВ**

С помощью простой модели аналитически и численно показано, что движение кометы Галлея является хаотическим и приведены некоторые его статистические характеристики. Получены оценки ошибок и предела численной экстраполяции хаотической траектории. Рассмотрены динамические ограничения полного времени пребывания кометы в Солнечной системе, которое существенно зависит от малых негравитационных сил.

CHAOTIC DYNAMICS OF HALLEY COMET, by V e c h e s l a v o v V. V. and C h i r i k o v B. V. Using a simple model the motion of comet Halley is shown, both analytically and numerically, to be chaotic, and some of its statistical characteristics are presented. Estimates for the errors and limitation in numerical extrapolation of a chaotic trajectory are given. Dynamical restrictions for comet's full sojourn time in the solar system, which crucially depends on weak nongravitational forces, are considered.

1. *Введение.* Орбиты многих планет близки к параболе, которая является простейшим видом сепаратрисы — траектории с нулевой невозмущенной частотой. Сейчас хорошо известно (см., например, Заславский, 1984; Лихтенберг и Либерман, 1984), что почти любое (регулярное) возмущение сепаратрисы приводит к образованию вокруг нее конечного хаотического слоя со случайным (непредсказуемым) движением, которое можно описать только статистически (при  $t \rightarrow \pm \infty$ ). Наиболее подробные данные накоплены о знаменитой комете Галлея, некоторые результаты исследования долговременной динамики которой и приводятся ниже (подробнее см. Вечеславов и Чириков, 1986). В качестве исходных данных мы используем параметры орбиты кометы, определенные Йомансом и Киангом (1981) для 45 ее появлений с 1910 по —1403 гг., и данные Калюки и др. (1985) для 1986 г. Уже беглый взгляд на нерегулярно меняющийся период кометы наводит на мысль о динамическом хаосе. Однако 45 оборотов — слишком мало для надежного статистического анализа. Поэтому прежде всего мы строим простую модель движения кометы, которая, однако, передает наиболее важные черты ее долговременной динамики и вместе с тем позволяет распространить численное моделирование и аналитические оценки вплоть до полного времени пребывания кометы в Солнечной системе.

2. *Модель.* Наиболее важная динамическая переменная коме-

УДК 523.64

## ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА КОМЕТЫ ГАЛЛЕЯ

**В. В. ВЕЧЕСЛАВОВ и Б. В. ЧИРИКОВ**

С помощью простой модели аналитически и численно показано, что движение кометы Галлея является хаотическим и приведены некоторые его статистические характеристики. Получены оценки ошибок и предела численной экстраполяции хаотической траектории. Рассмотрены динамические ограничения полного времени пребывания кометы в Солнечной системе, которое существенно зависит от малых негравитационных сил.

CHAOTIC DYNAMICS OF HALLEY COMET, by V e c h e s l a v o v V. V. and C h i r i k o v B. V. Using a simple model the motion of comet Halley is shown, both analytically and numerically, to be chaotic, and some of its statistical characteristics are presented. Estimates for the errors and limitation in numerical extrapolation of a chaotic trajectory are given. Dynamical restrictions for comet's full sojourn time in the solar system, which crucially depends on weak nongravitational forces, are considered.

*1. Введение.* Орбиты многих планет близки к параболе, которая является простейшим видом сепаратрисы — траектории с нулевой невозмущенной частотой. Сейчас хорошо известно (см., например, Заславский, 1984; Лихтенберг и Либерман, 1984), что почти любое (регулярное) возмущение сепаратрисы приводит к образованию вокруг нее конечного хаотического слоя со случайным (непредсказуемым) движением, которое можно описать только статистически (при  $t \rightarrow \pm \infty$ ). Наиболее подробные данные накоплены о знаменитой комете Галлея, некоторые результаты исследования долговременной динамики которой и приводятся ниже (подробнее см. Вечеславов и Чириков, 1986). В качестве исходных данных мы используем параметры орбиты кометы, определенные Йомансом и Киангом (1981) для 45 ее появлений с 1910 по —1403 гг., и данные Калюки и др. (1985) для 1986 г. Уже беглый взгляд на нерегулярно меняющийся период кометы наводит на мысль о динамическом хаосе. Однако 45 оборотов — слишком мало для надежного статистического анализа. Поэтому прежде всего мы строим простую модель движения кометы, которая, однако, передает наиболее важные черты ее долговременной динамики и вместе с тем позволяет распространить численное моделирование и аналитические оценки вплоть до полного времени пребывания кометы в Солнечной системе.

*2. Модель.* Наиболее важная динамическая переменная кометы — ее полная энергия  $E$ , определяющая период движения  $P$ , а, следовательно, и изменение фазы возмущения  $x$  ( $0 \leq x < 1$ ), глав-

ным образом от Юпитера. В свою очередь, изменение  $E$  зависит от  $x$  и мы приходим к двумерному каноническому отображению

$$w_{n+1} = w_n + F(x_n) \quad x_{n+1} = x_n + w_{n+1}^{-3/2}. \quad (1)$$

Здесь  $w \approx -2E$ , а  $F(x)$  — функция возмущения. Радиус круговой орбиты Юпитера и его скорость приняты за единицу. Отображение (1) аналогично, но не совпадает с отображением, полученным Петроским (1986) для специального случая плоской ограниченной круговой задачи трех тел. Функция  $F(x)$  определялась эмпирически (подгонкой) по 46 моментам времени  $t_n$  прохождения кометы через перигелий с помощью (1) и соотношений:  $x_n = X_n \pmod{1}$ ,  $X_n = t_n/P_J$ , где  $X_n$  — «глобальная» фаза возмущения, а  $P_J$  — период Юпитера. Целое  $n$  нумерует последовательные прохождения перигелия назад по времени;  $n = 1$  соответствует 1986 г. и принято  $X_1 = 0$ . Современное значение  $w = w_1 \approx 0.3$ . Результат подгонки изображен на рис. 1 (вставка П). Как выяснилось, разброс точек связан с возмущением от Сатурна, которое определяется другой, несоизмеримой фазой  $y = Y \pmod{1}$ ,  $Y = r_S X$ , где  $r_S$  — частота вращения Сатурна. С помощью специальной процедуры последовательных приближений можно разделить оба возмущения:  $F(x) = F_J(x) + F_S(y) + F_R$  (рис. 1). Остаточное возмущение  $F_R$  зависит от других планет, негравитационных сил и прочих приближений модели. Его среднеквадратичная величина  $\sigma_R = \langle F_R^2 \rangle^{1/2}$  характеризует точность модели:

$$\frac{\sigma_R}{\langle F_J^2 \rangle^{1/2}} \approx 0.030; \quad \frac{\sigma_R}{w_1} \approx 3.5 \cdot 10^{-4}; \quad \sigma_t \approx 14 \text{ дней} \quad (2)$$

для Фурье-приближений (ФП) возмущения (т. е. для представления периодических функций  $F_J(x)$ ,  $F_S(y)$  конечной суммой гармоник, см. рис. 1) и

$$\frac{\sigma_R}{\langle F_J^2 \rangle^{1/2}} \approx 0.10; \quad \frac{\sigma_R}{w_1} \approx 1.2 \cdot 10^{-3}; \quad \sigma_t \approx 50 \text{ дней} \quad (3)$$

для более простого приближения «пилы» (ПП) с параметрами

$$\begin{aligned} A_J &= 6.35 \cdot 10^{-3}; \quad x_+ = 0.552; \quad x_- = 0.640; \\ A_S &= 1.05 \cdot 10^{-3}; \quad y_+ = 0.305; \quad y_- = 0.385; \\ 2d_J &= x_- - x_+ = 0.088; \quad 2d_S = y_- - y_+ = 0.080. \end{aligned} \quad (4)$$

В (4)  $A_{J,S}$ ,  $x_{\pm}$ ,  $y_{\pm}$  — амплитуды и соответствующие им фазы ПП (рис. 1);  $\sigma_t = \langle (\Delta t)^2 \rangle^{1/2}$  — среднеквадратичная ошибка «предсказания» очередного  $t_n$  по двум предыдущим значениям. Принятые эффективные величины  $P_J = 4332.653$  дней и  $r_S = 0.4026868$  оптимизировались по минимуму  $\sigma_R$ . Они включают в себя различные возмущения, в частности, прецессию орбит кометы и планет. В целом модель (1) есть физическая *интерполяция* исходных данных  $t_n$ . С этим связана и лучшая точность ФП. Вне интервала интерполяции оба приближения  $F(x)$  сравнимы:  $\sigma_t \approx 60$  дней (использованы данные Ландграффа (1986)).

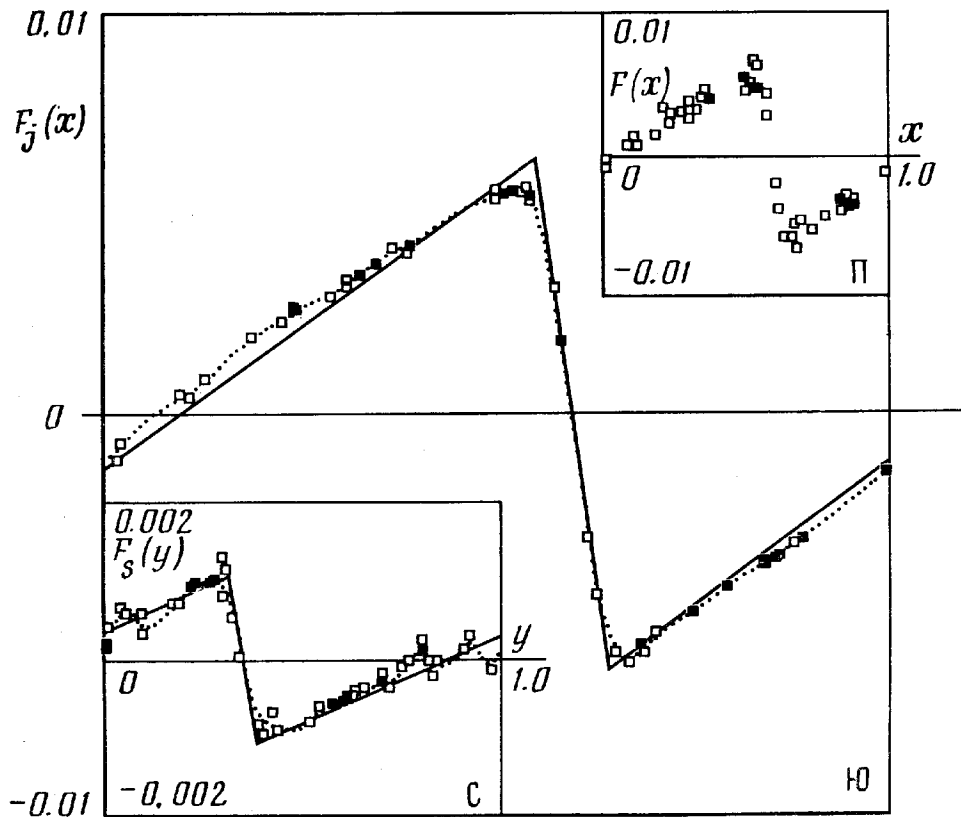


Рис. 1. Возмущение кометы Галлея: полное (вставка П); Юпитером (основное поле рисунка, Ю); Сатурном (вставка С). Кривые — Фурье-приближение (ФП) (10 гармоник,  $\langle F_J \rangle = \langle F_S \rangle = 0$ ); прямые — приближение «пилы» (ПП)

В приближении равномерного и прямолинейного движения Юпитера и кометы под прямым углом друг к другу в окрестности тесного сближения аналитическое выражение для возмущения имеет вид (Вечеславов и Чириков, 1986):

$$-F_J(x) \approx \frac{2A_J(x-x_0)d_J}{d_J^2 + (x-x_0)^2}, \quad F_J(x_0) = 0;$$

$$d_J \approx \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\sin i}{2\pi}} \approx 0.059; \quad A_J \approx \frac{2}{\pi \sqrt{3}} \frac{\mu_J}{d_J} \approx 6.0 \cdot 10^{-3}. \quad (5)$$

Здесь фаза наибольшего сближения  $x_0 \approx 0.60$ ;  $i$  — наклонение орбиты кометы,  $\sin i \approx \sin i_1 \approx 0.3$ , а  $\mu_J \approx 9.54 \cdot 10^{-4}$  — масса Юпитера. Для Сатурна  $y_0 \approx 0.35$ ;  $A_S/A_J \approx \mu_S/\mu_J a_S \approx 0.163$  ( $\mu_S$ ,  $a_S$  — масса и радиус орбиты Сатурна). В (5) возмущения от двух сближений кометы за оборот складываются, так как их фазы приблизительно совпадают при современных значениях параметров орбиты.

3. *Локальная неустойчивость и фактор ошибок.* Необходимым и достаточным условием динамического хаоса является сильная (экспоненциальная) неустойчивость движения (Алексеев и Якобсон, 1981), которая для модели (1) описывается линейным отображением

$$\delta w_{n+1} = \delta w_n + F'(x_n^0) \delta x_n; \quad \delta x_{n+1} = \delta x_n - 3/2 (w_{n+1}^0)^{-5/2} \delta w_{n+1}, \quad (6)$$

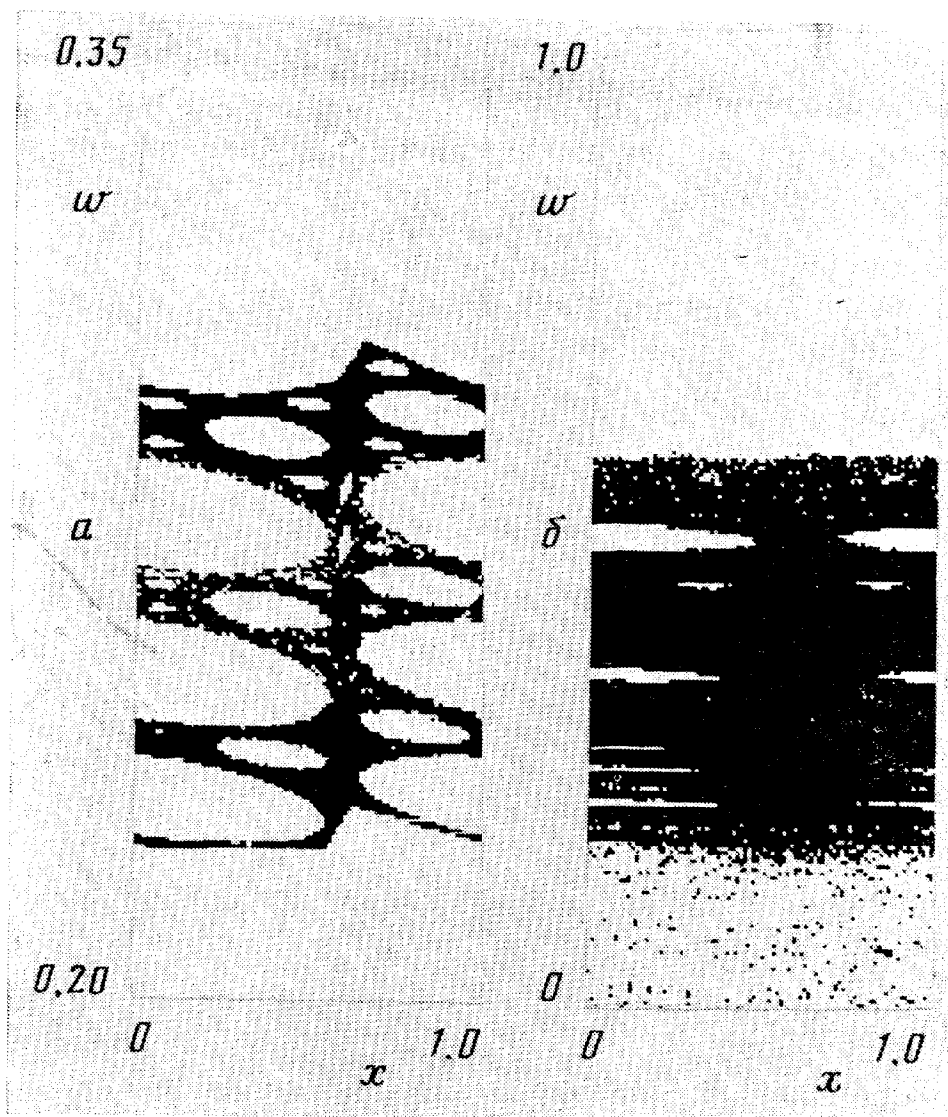


Рис. 2. Фазовая траектория модели (1): *a* — возмущение только от Юпитера,  $N = 1.5 \cdot 10^5$  итераций (ПП); *б* — возмущение от Юпитера и Сатурна с учетом переменного негравитационного ускорения,  $N_{ev} = 10^3$ , время жизни  $\tilde{N}_{Dd} = 3.1 \cdot 10^5$  (ПП)

где  $(x_n^0, w_n^0)$  — опорная (непериодическая) траектория (1), а  $(\delta x_n, \delta w_n)$  — касательный вектор. Хаос возникает за счет неустойчивых фаз, для которых собственные значения матрицы одной итерации отображения (6) — действительные числа:

$$\ln \lambda_n = \left| \ln \left| 1 - k_n + \sqrt{k_n(k_n - 2)} \right| \right|, \quad k_n = \frac{3}{4} (w_{n+1}^0)^{-5/2} F'(x_n^0). \quad (7)$$

Условие хаоса:  $h(w) = \Lambda(w) = \bar{\lambda}_n > 0$ , где усреднение производится вдоль опорной траектории в небольшом интервале  $w$ ;  $\Lambda$  — показатель (устойчивости) Ляпунова;  $h$  — энтропия Колмогорова — Синяя. При  $w < w_{cr} \approx 0.12$  все фазы  $x$  неустойчивы (так как  $|k_n| > 2$ ), а выше  $w_{cr}$  возникают большие области устойчивого (квазипериодического) движения (рис. 2, *a*) с периодом либрации  $P_L \approx \approx 2\pi [(1 - 2d_J)/(3A_J \sqrt{w})]^{1/2} \approx 700$  лет. Остатки этой периодичности сохраняются и в хаотической компоненте в виде корреляций

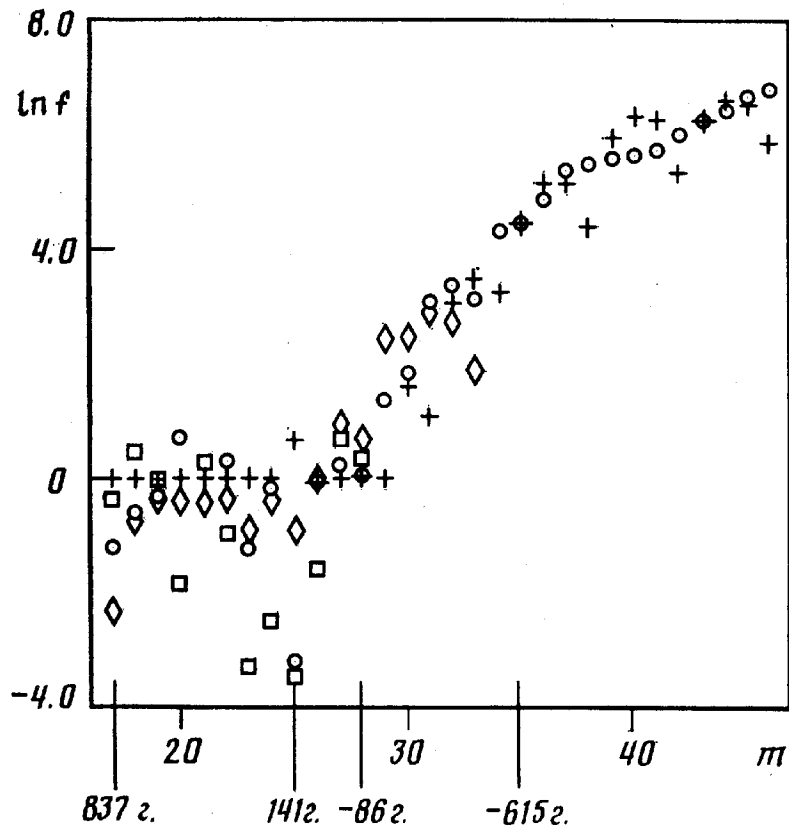


Рис. 3. Ошибки экстраполяции хаотической траектории кометы Галлея (с 837 по —1403 гг.) (см. текст)

$t_n$  (см. Йоманс и Кианг, 1981). Интервал неустойчивых фаз при этом резко сокращается  $x_+ < x < x_-$  (см. (4)). С учетом Сатурна  $h(0.3) \approx \approx 0.16$ .

Локальная неустойчивость резко ограничивает интервал экстраполяции траектории кометы, поскольку фактор ошибок  $f_m \equiv \equiv |\delta x_m / \delta x_0| \approx \exp(hm)$  растет, в среднем, экспоненциально с числом оборотов  $m$ . Здесь  $\delta x_0, \delta x_m$  — начальная и конечная ошибки фазы, соответственно. В качестве более аккуратной оценки фактора ошибок  $f_{n,m}$  на относительно небольшом числе оборотов ( $m - n$ ) можно взять собственное значение  $\lambda_{n,m}$  матрицы линейной системы (6) на этом участке. Например, для траектории в работе Йоманса и Кианга (1981) экстраполяция (назад по времени) начинается с 837 г. ( $n = 16$ ), когда была произведена последняя коррекция траектории по наблюдательным данным. Зависимость  $\ln f$  от  $m = = 17-45$ , где  $f = \lambda_{16,m}$  изображена на рис. 3 крестами. Неустойчивость развивается как раз на участке, где отсутствуют наблюдательные данные ( $m \geq 30$ , см. рис. 3 и Йоманс и Кианг, 1981). В конце экстраполяции  $f_{16,44} \approx 700$ . Если в качестве начальной ошибки  $\delta t_0 \approx 2.7$  дня взять среднее на устойчивом участке  $m = 17-28$  (по данным Йоманс и Кианг, 1981; см. рис. 3, квадраты), то  $\delta t_{44} \sim 5$  лет вместо ожидаемой ошибки около месяца. Это означает, что экстраполяция в данном случае имеет смысл максимум до —615 г. ( $m = 35$ , где  $\delta t_{35} \sim 200$  дней,  $\delta x_{35} \sim d_J$  (4)). Отметим, что большая абсолютная ошибка в  $t_n$  не мешает нам использовать всю траекторию для определения  $F(x)$  (п. 2), так как при этом входит ошибка только на

двух оборотах кометы. На рис. 3 показаны также  $f_{n,m}$  для одной из траекторий в работе Ландграфа (1986) (ромбы,  $\delta t_0 \approx 0.9$  дня) и траектории модели (1) (кружки,  $\delta t_0 \approx 19$  дней). В двух последних случаях в качестве ошибок  $t_n$  брались расхождения с траекторией Йоманса и Кианга (1984).

Подчеркнем, что средний рост ошибок определяется, в основном, возмущением от Юпитера, а не сближениями кометы с Землей, как иногда считается.

4. *Диффузия и время жизни кометы.* Если бы фазы возмущения  $x_n$  были не только случайными, но и статистически независимыми, то скорость диффузии  $D$  и время жизни (число оборотов) кометы  $N_D$  были бы равны

$$D(w) = \frac{\langle (\Delta w)^2 \rangle}{m} = D^0 = \langle F^2(x) \rangle \approx \frac{A_J^2}{3} \approx 1.3 \cdot 10^{-5}; \quad (8)$$

$$N_D = N_D^0 = \frac{w_1^2}{D^0} \approx 7000.$$

Именно так определяется  $D$  феноменологически, независимо от хаотичности движения (Штейнс и Риекштыньш, 1960), что, конечно, вообще говоря, неправильно. Численное моделирование (1) дает  $D(0.3) \approx 5 \cdot 10^{-6}$ , т. е. заметно меньше  $D^0$  за счет корреляций, связанных с областями устойчивости (рис. 2, а). С ростом  $w$  скорость диффузии в среднем падает, например,  $D(0.7) \approx 3 \cdot 10^{-6}$ .

Глобальная динамика кометы зависит прежде всего от структуры хаотической компоненты. В ПП она неограничена по  $w$ . Для реального гладкого возмущения область хаоса ограничена:  $w < w_b$ , численно  $w_b \approx 0.6$  (ФП). Согласно численному моделированию среднее диффузионное время жизни кометы до выхода из Солнечной системы при  $w \approx 0$  (в обе стороны по времени)  $\bar{N}_D \approx 2 \cdot 10^4$ ;  $\bar{t}_D \approx 4 \cdot 10^6$  лет с очень большими флуктуациями из-за «застревания» траектории вследствие неравномерности диффузии. Поэтому относительно слабое возмущение от Сатурна  $A_S^2/A_J^2 \approx 0.03$  очень существенно: его «выключение» увеличивает  $\bar{N}_D$  в 30 раз (рис. 2, а). Эффект остаточного возмущения (с учетом Сатурна) невелик.

Глобальная динамика кометы зависит также от следующих факторов, неучтенных в простой модели (1).

1) Прецессия перигелия кометы с периодом  $N_p \approx 440$  оборотов кометы приводит к периодическому пересечению ее орбиты с орбитой Юпитера. В результате возможен прямой выброс кометы из Солнечной системы при очень тесном сближении с Юпитером. Используя (5), можно показать, что среднее время жизни до выброса весьма велико:  $N_{ej} \sim (\pi/2d_J) (w_1/A_J)^2 \approx 10^5$ . Помимо этого несколько возрастает средняя скорость диффузии:  $\bar{D} \approx 6d_J D \ln N_p \approx 2D$ , что отчасти компенсируется падением  $D$  из-за расфазировки двух сближений (п. 2).

2) Диффузия по  $i$  изменяет  $D(w)$  (5). Оценки показывают, что порядок времени жизни кометы при этом сохраняется.

3) Поперечная негравитационная сила (Калюка и др., 1985) приводит к дрейфу по энергии:  $\overline{dw/dn} = \langle F(x) \rangle \approx -3 \cdot 10^{-5}$ . Это заметно уменьшает время жизни кометы вперед по времени, численно  $\bar{N}_{Da} \approx \approx 7000$ , что близко к времени испарения кометы  $N_{ev} \approx 4000$  (Боярчук и др., 1986). Назад по времени дрейф  $w$  полностью блокирует диффузию, и время жизни определяется выбросом кометы.

4) Изменение негравитационного ускорения приводит к замедлению дрейфа назад по времени ( $n > 0$ ):  $\overline{dw/dn} = \langle F \rangle (1 + n/N_{ev})^{-1}$ . Время жизни кометы все же резко возрастает за счет падения  $D(w)$  с  $w$ . Даже при  $N_{ev} = 10^3$  среднее время жизни  $1.5 \cdot 10^5$  порядка времени выброса  $N_{ej} \approx 10^5$  (рис. 2, б).

Отметим, что по порядку величины время пребывания кометы Галлея в Солнечной системе ( $N \sim 10^5$ ;  $t \sim 10^7$  лет) согласуется с возрастом гипотетических кометных ливней из облака Оорта (Хат и др., 1987).

Все вычисления проводились на быстрой персональной ЭВМ «Одренок», разработанной и изготовленной в Институте ядерной физики СО АН СССР (Пискунов и Тарарышкин, 1986).

Мы глубоко признательны А. Н. Алешаеву, С. Д. Белову, В. Р. Козаку, Э. А. Куперу, Г. С. Пискунову и С. В. Тарарышкину за многочисленные советы и помощь. Мы благодарны также Ф. М. Израйлеву и Д. Л. Шепелянскому за интересные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Алексеев В. М. и Якобсон М. В. // Phys. Reports. 1981. V. 75. P. 287.  
 Боярчук А. А., Гринин В. П., Зверева А. М., Петров П. П. и Шейхет А. И. // Письма в Астрон. журн. 1986. Т. 12. С. 696.  
 Вечеславов В. В. и Чириков Б. В. Хаотическая динамика кометы Галлея: Препринт № 86-184. Новосибирск: ИЯФ, 1986.  
 Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.  
 Йоманс и Кванг (Yeomans D. K. and Kiang T.) // Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 1981. V. 197. P. 633.  
 Калюка Ю. Ф., Тарасов В. П. и Тихонов В. Ф. Письма в Астрон. журн. 1985. Т. 11. С. 778.  
 Ландграф (Landgraf W.) // Astronomy and Astrophys. 1986. V. 163. P. 246.  
 Лихтенберг А. и Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.  
 Петроский (Petrosky T. Y.) // Phys. Letters. A. 1986. V. 117. P. 328.  
 Пискунов Г. С. и Тарарышкин С. В. // Автометрия. 1986. № 4. С. 32.  
 Хат П. и др. (Hut P., Alvarez W., et al.) // Nature. 1987. V. 329. P. 118.  
 Штейнс К. А. и Риекстыньш Э. Я. // Астрон. журн. 1960. Т. 37. С. 1061.

Ин-т ядерной физики  
 СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию  
 2 февраля 1987 г.  
 После доработки  
 9 июля 1987 г.