

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.184.5

ВЫСОКОВОЗБУЖДЕННЫЙ АТОМ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, Д. Л. Шепелянский

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	355
2. Вероятности и приближенные правила отбора для связанно-связанных и связанно-свободных переходов между квазиклассическими состояниями	356
3. Возмущение высоковозбужденных атомных состояний	358
4. Многофотонная ионизация высоковозбужденных состояний	364
5. Туннельная ионизация высоковозбужденных состояний	367
6. Стохастическая динамика классического электрона в переменном поле	369
а) Введение (369). б) Нелинейный резонанс для круговых орбит (370). в) Перекрывание резонансов для вытянутых орбит (371). г) Общий случай (373). д) Стохастичность в низкочастотном поле (375). е) Циркулярная поляризация (376).	
7. Диффузионная ионизация	377
а) Введение (377). б) Вычисление коэффициента диффузии (378). в) Некоторые особенности диффузионного возбуждения (380). г) Квазиклассический расчет времени диффузии (380)	
8. Условия реализации диффузионной и квантовой ионизации	381
9. Наблюдение процесса нелинейной ионизации высоковозбужденных атомов	383
10. Сопоставление теории и эксперимента	387
11. Заключение	389
Цитированная литература	391

1. ВВЕДЕНИЕ

В этом обзоре пойдет речь о высоковозбужденных атомах, основные свойства которых достаточно хорошо известны¹. Тем не менее напомним те из них, которые нам будут необходимы в дальнейшем. По определению, высоковозбужденным называется атомное состояние, для которого главное квантовое число $n \gg 1$. В сложных атомах высоковозбужденные состояния водородоподобны, т. е. их волновые функции совпадают с волновыми функциями атома водорода. Энергии высоковозбужденных состояний E_n имеют вид

$$E_n = -1/2n^2; \quad (1)$$

здесь и в дальнейшем используется атомная система единиц $e = \hbar = m = 1$. Кеплерова частота Ω классического движения электрона в атоме, согласно принципу соответствия, равна $\Omega = E_n - E_{n+1}$. С учетом (1) она имеет вид

$$\Omega = n^{-3}. \quad (2)$$

Хорошо известно, что в общем случае для описания атомов необходимо использовать законы квантовой механики. Однако если $n \gg 1$, то квантовомеханические расчеты можно осуществлять в рамках квазиклас-

1 УФН, т. 140, вып. 3

сического приближения, причем многие результаты, полученные в этом приближении, совпадают с результатами расчетов по классической механике.

В дальнейшем мы будем рассматривать нелинейные явления, возникающие при воздействии на высоковозбужденный атом переменного электромагнитного поля. Взаимодействие электромагнитного поля с атомом, находящемся в основном в низколежащих возбужденных квантовых состояниях, достаточно хорошо исследовано; в частности, изучены динамическая поляризуемость, многофотонная и туннельная ионизация атомов ^{2,3}. В этом обзоре мы обсудим нелинейные эффекты для высоковозбужденных атомов.

Мы будем, как правило, рассматривать электромагнитные поля с частотами порядка кеплеровой частоты (2). Для высоковозбужденных состояний это соответствует СВЧ диапазону частот. Изменяя частоту ω и напряженность поля $\mathcal{E}$, а также главное квантовое число n рассматриваемого состояния, можно реализовать самые различные значения параметра адиабатичности $\gamma = \omega/n\mathcal{E}$. Величина этого параметра, как хорошо известно ⁴, определяет, является ли квантовый процесс ионизации многофотонным или туннельным. Забегая вперед, отметим, что квазиклассичность высоковозбужденных состояний приводит к качественно новым явлениям, не имеющим аналога для атомов, находящихся в основном состоянии; важнейшее из таких явлений — это возникновение стохастичности в движении атомного электрона, приводящее к диффузионной ионизации атомов, которой в данном обзоре будет уделено значительное место.

Отметим, что движение заряженной частицы по круговой орбите во внешнем резонансном поле давно привлекало внимание исследователей. Именно при решении этой задачи Векслером и Мак-Милланом в 40-х годах было обнаружено известное явление автофазировки, явившееся основой действия всех современных кольцевых ускорителей. Позднее, при исследовании движения частиц в магнитных ловушках, изучалось явление динамической стохастичности классических систем. В данном обзоре это явление обсуждается на примере электрона в высоковозбужденном (ридберговском) атоме.

2. ВЕРОЯТНОСТИ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПРАВИЛА ОТБОРА ДЛЯ СВЯЗАННО-СВЯЗАННЫХ И СВЯЗАННО-СВОБОДНЫХ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИМИ СОСТОЯНИЯМИ

Хорошо известно ², что вероятности многофотонных переходов определяются составными матричными элементами, выражающимися через произведения матричных элементов однофотонных переходов. Последние в свою очередь выражаются через радиальные дипольные матричные элементы

$$R_{nl}^{n'l\pm 1} = \int_0^\infty R_{nl}(r) R_{n'l\pm 1}(r) r^3 dr; \quad (3)$$

здесь $R_{nl}(r)$ — радиальные волновые функции, n — главное, l — орбитальное квантовые числа. В случае атома водорода Гордон получил точный ответ для интеграла (3), содержащий гипергеометрические функции (см., например, книгу ⁵).

Однако для переходов между состояниями с большими n применение формулы Гордона как для качественных оценок, так и для непосредственных вычислений затруднительно, поскольку велики, вообще говоря, все три параметра гипергеометрической функции.

Условия $n, n' \gg 1$ позволяют получить различные приближенные простые выражения для матричного элемента (3). Сводка таких выражений содержится в работе ⁶. В этой же работе, а также в книге ¹ приводятся вероятности радиационных переходов между состояниями с $n, n' \gg 1$ и $\Delta n = n - n' \ll n, n'$. В этом случае матричный элемент (3), следуя принципу соответствия Гейзенберга, сводится к компоненте Фурье зависящей от времени классической координаты кеплерова движения.

В работе ⁶ приведены квазиклассические значения матричных элементов (3) и вероятностей радиационных переходов для случая $n, n' \gg 1$ и $\Delta n \sim n, n'$. В этом случае при малых орбитальных моментах $l \ll n$ матричные элементы (3) квазиклассически велики, а именно, порядка $n^{1/3}$. Их большая величина является следствием сильного перекрытия волновых функций на малых расстояниях r . Кроме того, в работе ⁶ даны также матричные элементы и вероятности радиационных переходов для случая больших $l \sim n$. Они экспоненциально малы. Наконец, определенное упрощение возникает в точных формулах Гордона в случае, когда только одно $n \gg 1$, а другое $n' \sim 1$. В этом случае вместо гипергеометрических функций получаются вырожденные гипергеометрические функции, имеющие более простые свойства. Соответствующие результаты содержатся в работе ⁶.

Сравнивая квазиклассические значения различных матричных элементов, можно сделать вывод, что для переходов с $l \sim n \gg 1$ при изменении главного квантового числа n орбитальное квантовое число l изменяется с подавляющей вероятностью в ту же сторону, что и n . Это правило было эмпирически получено Г. Бете ⁷. Из оценок квазиклассических матричных элементов следует, что это правило нарушается для малых орбитальных квантовых чисел и особенно сильно для случая $l \ll n^{2/3}$, где, как видно из результатов, полученных в работе ⁶, квазиклассический дипольный матричный элемент вообще не зависит от l , т. е. тем самым одинаков для переходов с $l' = l \pm 1$. В работе ⁸ указанное правило отбора обобщено следующим образом: при изменении l величина n меняется преимущественно в том же направлении и на ту же величину.

Из матричных элементов связанно-связанных переходов легко получить матричные элементы связанно-свободных переходов, для чего соответствующее главное квантовое число n следует заменить на i/p , где p — импульс электрона в непрерывном спектре. Таким образом можно получить сечения фотоионизации из высоковозбужденных состояний nl ⁶.

С помощью аналитического продолжения по другому главному квантовому числу n' можно получить квазиклассические матричные элементы, описывающие переходы между квазиклассическими состояниями непрерывного спектра, т. е. состояниями с $p, p' \ll 1$. Они, а также соответствующие сечения тормозного поглощения и тормозного излучения при рассеянии электронов с малой энергией на кулоновском центре приведены в работе ⁶.

Следует отметить, что при усреднении получаемых вероятностей радиационных однофотонных переходов по l в предположении равномерности всех состояний с определенными магнитными квантовыми числами получаются общеизвестные формулы Крамерса. Подчеркнем, что во все эти формулы с усреднением (для связанно-связанных, связанно-свободных и свободно-свободных переходов) основной вклад вносят вероятности переходов между состояниями с малыми орбитальными квантовыми числами $l \ll n$.

Таким образом, многочисленные квазиклассические формулы, сведенные в работе ⁶, могут быть использованы для описания радиационных

переходов, когда одно или оба состояния перехода лежат вблизи границы дискретного и непрерывного спектров.

Для сложных атомов следует заменить во всех формулах n на $n^* = n - \delta_l$, где δ_l — квантовый дефект состояния n, l . В случае $\Delta n \ll n, n'$ такая замена и соответствующие численные расчеты радиальных дипольных матричных элементов (3) были проведены в работе ⁹. В этом случае замена n на n^* весьма существенна, так как величина δ_l порядка единицы при малых l , и Δn существенно меняется при замене n на n^* . Однако если мы имеем дело с матричными элементами, для которых $\Delta n \sim n, n'$, то замена n на n^* практически не изменяет Δn и можно сделать вывод, что квантовый дефект не влияет на величину матричных элементов с $\Delta n \sim n, n'$. Далее, при $l \sim n$ квантовый дефект вообще практически отсутствует, и заменять n на n^* не требуется как для переходов с $\Delta n \ll n, n'$, так и для переходов с $\Delta n \sim n, n'$.

В работе ¹⁰ были рассчитаны вероятности квадрупольных переходов между высоковозбужденными состояниями водородоподобного атома.

В заключение этой главы укажем, что в работе ⁶ дано обобщение принципа соответствия Гейзенберга на случай $\Delta n \sim n, n'$.

3. ВОЗМУЩЕНИЕ ВЫСОКОВОЗБУЖДЕННЫХ АТОМНЫХ СОСТОЯНИЙ

Возмущение основных и низколежащих атомных состояний полем монохроматической волны $\mathcal{E} \cos \omega t$ детально описано в литературе ^{2, 3}. Здесь сначала мы обратимся к возмущению высоковозбужденных состояний атома водорода, характеризуемых квантовыми числами nlm ($n \gg 1$). Рассмотрим воздействие на него поля волны, которая, для определенности, скажем, линейно поляризована вдоль оси z .

Мы пока отложим обсуждение проблемы линейного сдвига Штарка в переменном поле и обратимся к расчету квадратичного эффекта Штарка, т. е. к расчету динамической поляризуемости. Эта величина представляет собой коэффициент пропорциональности в зависимости сдвига δE_{nlm} атомного уровня при включении монохроматического электромагнитного поля от квадрата амплитуды напряженности этого поля:

$$\delta E_{nlm} = -\frac{1}{4} \alpha_{nlm} \mathcal{E}^2.$$

Такая зависимость реализуется для частот внешнего поля ω , нерезонансных по отношению к частотам атомных переходов.

Как известно ^{2, 3}, в общем случае динамическая поляризуемость имеет вид

$$\alpha_{nlm} = 2 \sum_{n'l'} \frac{\omega_{nn'}}{\omega^2 - \omega_{nn'}^2} |z_{n'l'm}^{n'l'm}|^2; \quad (4)$$

здесь $\omega_{nn'}$ — частота атомного перехода между состояниями с главными квантовыми числами n и n' , т. е.

$$\omega_{nn'} = 1/(2n'^2) - 1/(2n^2), \quad (5)$$

а величина $z_{n'l'm}^{n'l'm}$ представляет собой дипольный матричный элемент от оператора z между кулоновскими волновыми функциями.

Для основного и низковозбужденных атомных состояний расчет величины α возможен лишь численными методами с использованием ЭВМ, так как матричные элементы имеют сложный вид. В случае высоковозбужденных состояний ($n \gg 1$) для величины (4) сравнительно просто получить аналитическое выражение ¹¹. Зависимость от магнитного квантового числа m в (4) легко выделяется на основе формулы (29.7) книги ⁷. Суммирова-

ние по l' проводится явно, так как оно состоит только из двух слагаемых с $l' = l \pm 1$. Таким образом, для решения задачи нужно в (4) провести суммирование по главным квантовым числам n' виртуальных состояний (включая интегрирование по непрерывному спектру). Эта задача разбивается на две: 1) суммирование по n' , далеким от n , т. е. когда $\Delta n \sim n$; 2) суммирование по n' , близким к n , т. е. когда $\Delta n \ll n, n'$.

Рассмотрим сначала учет далеких n' . Подставляя в этом случае соответствующие квазиклассические матричные элементы (см. гл. 2) и заменяя квазиклассическое суммирование по n' интегрированием на основе правила

$$\sum_{n'} \frac{1}{n'^3} (\dots) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{n'n} (\dots),$$

легко убедиться, что соответствующий вклад в поляризуемость (4) обращается в нуль из-за нечетности подынтегрального выражения по переменн- ной $\omega_{n'n}$. Это объясняется квазиклассичностью спектра высоковозбужден- ных состояний и возникающей вследствие этого симметрией при суммиро- вании по $n' > n$ и $n' < n$. Отметим, что для основного и низковозбужден- ных состояний вышесказанное утверждение заведомо несправедливо, так как суммирование по n' существенно несимметрично относительно n .

Таким образом, сумма в (4) определяется лишь значениями n' , близ- кими к n , когда неправомерно заменять сумму на интеграл, поскольку в ней существенно относительно небольшое число слагаемых. Поскольку состояния с $n' > n$ в значительной степени компенсируют состояния с $n' < n$ в сумме (4), то для радиальных дипольных матричных элементов (3) следует использовать более точные выражения, нежели полученные на основе принципа соответствия (см. гл. 2), которые учитывают члены следую- щего за наинизшим приближения по параметру квазиклассичности $1/n$. Кроме того, в выражении (5) нужно учесть не только линейные, но и квад- ратичные члены разложения по разности Δn . С учетом этих замечаний в ра- боте ¹¹ было получено аналитическое выражение для α_{nlm} . Ввиду того, что оно имеет весьма громоздкий вид, мы его здесь не приводим, а ограничимся лишь сравнительно прозрачным частным случаем $l = m = 0$:

$$\alpha_{n00} = \frac{2}{3} n^6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7k^2 - (\omega n^3)^2}{[k^2 - (\omega n^3)^2]^3} J_k'^2(k); \quad (6)$$

здесь $J_k(x)$ — функция Бесселя.

Из выражения (6) видно, что

$$\alpha_{nlm} \sim n^6, \quad (7)$$

если только мы не находимся в области резонансов с дискретными атомны- ми состояниями в окрестности n -го уровня. Эти резонансы определяются очевидными условиями

$$\omega = \frac{k}{n^3}, \quad (8)$$

где k — целое число. Как видно из (6), в окрестности каждого из резо- нансов величина α_{nlm} обращается в бесконечность, не меняя знака при этом и будучи положительной. Таким образом, резонансное поведение динами- ческой поляризуемости высоковозбужденных состояний (рис. 1) качест- венно отличается от резонансного поведения α_{nlm} для основных и низко- возбужденных состояний, когда она меняет знак при прохождении резо- нанса (см. рис. 8.1 и 8.2 книги ²). Это различие объясняется тем, что в рассматриваемом здесь случае накладываются резонансы с более высоко- лежащими и нижележащими по отношению к n состояниями, в то время

как при $n \sim 1$ имеет место резонанс с одним определенным для данной частоты дискретным атомным уровнем.

Это утверждение, разумеется, справедливо с точностью до ангармонизма ридберговских состояний.

Обсудим теперь поведение динамической поляризуемости в межрезонансных промежутках. Как хорошо известно (см., например, рис. 8.1 книги ²⁾), для основных состояний атомов (в данном случае $n = 1$) динамическая поляризуемость в линейно поляризованном поле обращается в нуль

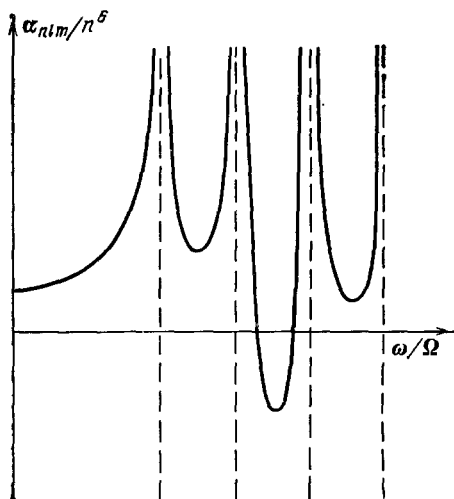


Рис. 1. Динамическая поляризуемость высоковозбужденного состояния (nlm) в зависимости от частоты ω электромагнитного поля.

По оси абсцисс отложена величина $\omega n^3 = \omega/\Omega$, по оси ординат — величина α_{nlm}/n^6 . Вертикальные асимптоты соответствуют резонансам с близлежащими высоковозбужденными состояниями.

один раз в каждом межрезонансном промежутке. Для возбужденных низлежащих состояний ($n \sim 1$) зависимость имеет другой характер, так как по мере увеличения частоты могут возникать резонансы как с вышележащими, так и с нижележащими состояниями. В частности, в межрезонансных промежутках динамическая поляризуемость может не обращаться в нуль или обращаться в нуль дважды (меняя, однако, знак при прохождении каждого резонанса). В рассматриваемом здесь случае высоковозбужденных состояний ($n \gg 1$) динамическая поляризуемость, будучи резонансно большой положительной величиной в окрестности резонансных частот, в межрезонансных промежутках может принимать отрицательные значения за счет большого отрицательного слагаемого суммы в (6) с $k = 1$ для частот $\omega > \sqrt{7}/n^3$. При этом она дважды обращается в нуль в межрезонансном промежутке.

Отметим важное обстоятельство, что величина динамической поляризуемости (6) в $\sim n$ раз меньше, чем каждое из слагаемых суммы в (4), которое имеет порядок величины n^7 для частот $\omega \sim n^{-3}$. Этот факт является следствием упоминавшейся выше компенсации слагаемых с $n' > n$ и $n' < n$.

В статическом случае $\omega n^3 \ll 1$ из (6) следует, что динамическая поляризуемость положительна. Это утверждение согласуется с известным утверждением, что термы атома водорода благодаря квадратичному эффекту Штарка в постоянном внешнем поле всегда смещаются вниз. Действительно, переход от сферического к параболическому базису, в котором выражаются статические сдвиги термов атома водорода, может быть достигнут путем умножения на квадраты соответствующих коэффициентов Клебша — Гордана.

Особый случай возникает в асимптотическом пределе больших частот, когда $\omega n^3 \gg 1$. В этом случае, как видно из (6), динамическая поляризуемость становится весьма малой и отрицательной. Используя теорему сумм для функций Бесселя, получаем

$$\alpha_{n00} = -\frac{1}{3\omega^2} \ll n^6. \quad (9)$$

Величина (9) определяет колебательную энергию свободного электрона во внешнем поле частоты ω . Численный множитель в (9) связан с выделением

из плоской волны, характеризующей волновую функцию электрона в рассматриваемом пределе, сферически симметричного состояния $l = m = 0$. Такое выделение соответствует усреднению по телесному углу

$$\frac{\overline{\cos^2 \theta}}{\mathcal{E}} = \frac{1}{3}.$$

Все вышесказанные заключения переносятся без принципиальных изменений на случай произвольных l и m . Универсальная зависимость от m выделяется в динамической поляризуемости в предельном случае $l \gg 1$:

$$\alpha_{nlm} \sim \left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right). \quad (10)$$

Качественный вид динамической поляризуемости в зависимости от ωn^3 представлен на рис. 1. Он иллюстрирует рассмотренные выше особенности динамической поляризуемости высоковозбужденных состояний.

Для применимости полученных выражений требуется, чтобы следующие порядки теории возмущений по напряженности электрического поля были малы по сравнению с квадратичным. Это выполняется, если $\mathcal{E} \ll n^{-4}$ (см. гл. 6). Кроме того, мы пренебрегли в рассмотрении линейным Штарковским сдвигом, который в случае переменного поля проявляется как заполнение квазиэнергетических состояний; энергии наиболее заполненных состояний соответствуют линейному сдвигу Штарка, имеющему место для постоянного поля. Согласно общей теории ^{2, 3} возникновением квазиэнергетических состояний, имитирующих линейный сдвиг Штарка, можно пренебречь при выполнении условия

$$\frac{d\mathcal{E}}{\omega} \sim \frac{n^2 \mathcal{E}}{\omega} \ll 1 \quad (11)$$

(где d — дипольный диагональный матричный элемент вырожденного состояния n), ограничивающего напряженность электрического поля волны $\mathcal{E}$ сверху, а его частоту ω — снизу. При получении критерия (11) было использовано, что характерные дипольные матричные элементы (3) имеют порядок величины n^2 , если эти элементы берутся между высоковозбужденными состояниями, близкими по энергии друг к другу (см. гл. 2).

Обсудим реалистичность выполнения условия (11). При частотах $\omega \sim n^{-3}$ из (11) получаем условие $\mathcal{E} \ll n^{-5}$, в то время как при частотах $\omega \sim n^{-2}$ находим $\mathcal{E} \ll n^{-4}$, что совпадает с приведенным выше критерием применимости теории возмущений.

При переходе от атома водорода к высоковозбужденным состояниям сложных атомов следует принять во внимание различие n и n^* . Во-первых, для больших орбитальных моментов l (практически $l > 2$), как известно, можно пренебречь квантовым дефектом и приведенные выше результаты можно перенести без изменений. Во-вторых, для малых орбитальных моментов (практически $l = 0, 1, 2$) наличие квантового дефекта приводит к тому, что нарушается компенсация слагаемых с $n' > n$ и $n' < n$ в сумме (4) из-за различия энергий соответствующих состояний. В результате динамическая поляризуемость резко возрастает и становится порядка n^7 . Кроме того, поведение поляризуемости становится похожим на поведение поляризуемости низковозбужденных состояний (см. выше), так как резонансы с $n' > n$ и $n' < n$ оказываются при разных энергиях.

До сих пор мы рассматривали случай линейной поляризации электромагнитной волны. Случай циркулярной поляризации поля не вносит принципиальных изменений в результаты, так как в исходной формуле (4) меняются лишь факторы, стоящие перед знаком суммы по n' и зависящие только от l и m . Сами суммы по n' изменению не подвергаются. Те же заме-

чения относятся и к общему случаю эллиптической поляризации поля. В настоящее время отсутствуют эксперименты, в которых наблюдался бы квадратичный сдвиг Штарка высоковозбужденных состояний в условиях выполнения неравенства (11) (см. прим. при корректуре на с. 439).

Обратимся теперь к линейному сдвигу Штарка в переменном поле. Согласно общей теории ^{2, 3} при выполнении неравенства, противоположного (11), каждый уровень расщепляется на квазиэнергетические состояния. Вероятность заселения k -го квазиэнергетического состояния пропор-

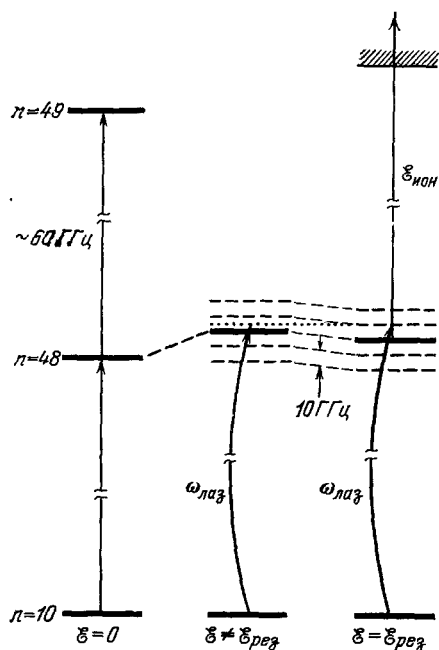


Рис. 2. Схема, иллюстрирующая эксперимент ¹³ по резонансной ионизации через квазиэнергетические гармоники уровня с $n=48$.

Подстройка в резонанс осуществляется за счет штарковского сдвига уровня с $n=48$ в радиочастотном поле напряженностью $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{рез}}$.

Подстройка в резонанс осуществляется за счет штарковского сдвига уровня с $n=48$ в радиочастотном поле напряженностью $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{рез}}$. Атомы пролетали через резонатор, в котором возбуждалось поле на частоте $\omega = 10$ ГГц. Амплитуда напряженности этого последнего поля изменялась таким образом, чтобы за счет штарковского сдвига уровня с $n=48$ подстроить резонанс между частотой лазерного излучения и частотой перехода из состояния с $n=10$ в одну из квазиэнергетических гармоник состояния с $n=48$ (рис. 2). Наблюдалась ионизация этих атомов третьим полем с частотой порядка 1 ГГц, напряженность которого была больше характерной атомной напряженности для $n=48$ (порядка 100 В/см), так что если происходило заселение состояния с $n=48$, то все такие атомы ионизовались.

Было обнаружено, что выход ионов как функция напряженности поля с частотой 10 ГГц имеет резонансный характер. Резонанс соответствовал заселению квазиэнергетических гармоник с энергиями

$$E_{Kn} = E_{n=48} + K\omega,$$

где $\omega = 10$ ГГц и $K = 1, 2, 3$ и 4.

циональна величине $J_k^2(n^2\mathcal{E}/\omega)^{1/2}$, где J — функция Бесселя. Вероятность максимальна для тех квазиэнергетических состояний, энергия которых соответствует энергии исходного уровня, смещенного в постоянном поле за счет линейного эффекта Штарка (при этом $\mathcal{E}_{\text{const}} = \mathcal{E}^2$). Детальная картина возникновения квазиэнергетических состояний описана для первых возбужденных состояний атома водорода ^{2, 3, 12}. В случае высоковозбужденных состояний эффект качественно носит тот же характер. В условиях, когда неравенство (11) имеет противоположный знак, квадратичный сдвиг Штарка мал по сравнению с линейным сдвигом; он проявляется в небольшом общем смещении всей сетки квазиэнергетических состояний. Неравенство, противоположное (11), может быть реализовано при малых частотах $\omega < n^{-3}$ при напряженности поля $\mathcal{E} > \omega/n^2$.

Экспериментально квазиэнергетическое расщепление и квадратичный штарковский сдвиг высоковозбужденных состояний атома водорода наблюдались в работе ¹³. В этом эксперименте атомы водорода могли возбу-

В данном эксперименте выполнялось условие

$$\frac{n^2 \mathcal{E}}{\omega} \gg 1,$$

противоположное (11). Именно благодаря этому условию и заселялись квазиэнергетические гармоники. Таким образом, можно сделать вывод, что невыполнение условия (11) не мешает наблюдению квадратичного эффекта Штарка: как сам уровень с $n = 48$, так и его квазиэнергетические гармоники смещаются на величину квадратичного сдвига Штарка, в то время как величина фактора $n^2 \mathcal{E}/\omega$ отвечает за распределение заселенности по квазиэнергетическим гармоникам.

Отметим, что в данном эксперименте квадратичный сдвиг Штарка имел практически статический характер, так как для $n = 48$ оказывается $\omega n^3 = 1/6$. Вследствие дипольных правил отбора при однофотонном переходе $n = 10 \rightarrow n = 48$, осуществляемом лазерным полем, заселялись состояния уровня $n = 48$ с малыми орбитальными квантовыми числами. Порядок величины квадратичного штарковского сдвига можно оценить, если воспользоваться статическим пределом формулы (6) для динамической поляризуемости:

$$\alpha_{n00} \approx 0,6n^6 \quad \text{при} \quad \omega n^3 \ll 1.$$

Знак штарковского сдвига (отрицательный) и порядок величины сдвига согласуются с результатами эксперимента¹³.

Дальнейшее развитие этих исследований¹⁴ полностью подтвердило их основной результат — возможность наблюдения заселения квазиэнергетических гармоник высоковозбужденных состояний атома.

С точки зрения постановки эксперимента в работе¹⁴ имелись два отличия. Во-первых, атомы водорода возбуждались из состояния $n = 10$ в состояния $n = 44-67$ за счет поглощения кванта инфракрасного излучения CO_2 -лазера и подбора кинетической энергии атомов, используя эффект Доплера (см. ниже, гл. 9^{51, 52}). Во-вторых, применялось поле радиодиапазона с изменяемой частотой $\omega \approx 6-8$ ГГц.

Наблюдалась зависимость числа протонов от кинетической энергии атомов (т. е. от величины n) и от частоты ω и напряженности $\mathcal{E}$ поля радиодиапазона (т. е. от номера k и эффективности заселения различных квазигармоник). Наблюдалось большое число резонансов в выходе протонов, соответствующих возбуждению различных квазиэнергетических состояний с энергиями $E_{nk} = E_n + k\omega$.

Фиксируя максимумы этих резонансов, оказалось возможным получить данные о зависимости вероятности возбуждения состояний с фиксированными n и k от напряженности $\mathcal{E}$ поля радиодиапазона. Обнаружено, что при увеличении $\mathcal{E}$ эта зависимость сначала резко возрастает, а после достижения максимума плавно убывает. Наблюдаемая зависимость согласуется с предположением, что вероятность заселения k -й квазигармоники состояния n пропорциональна величине $J_k^2(n^2 \mathcal{E}/\omega)$, так как зависимость соответствует известным свойствам асимптотики функции Бесселя. Наблюдалось также, что при фиксированном k напряженность радиочастотного поля $\mathcal{E}_{\text{max}}$, соответствующая максимуму возбуждения, резко уменьшается при увеличении n . Эта зависимость также соответствует свойствам функции Бесселя: максимум функции достигается при величине аргумента, равной величине индекса, т. е. $\xi \sim 1/n^2$.

4. МНОГОФОТОННАЯ ИОНИЗАЦИЯ ВЫСОКОВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Все основные соотношения, описывающие вероятность процесса многофотонной ионизации основных и низковозбужденных состояний атомов, хорошо известны^{2,3}. В принципе, они сохраняются и для ионизации высоковозбужденных атомных состояний. Так, вероятность прямого процесса многофотонной ионизации (т. е. в отсутствие промежуточных резонансов) из состояния с главным квантовым числом n описывается обычным степенным выражением

$$w_n = \alpha_n^{(K_0)}(\omega, \rho) \xi^{2K_0},$$

где K_0 — число квантов поля, поглощение которых необходимо для выполнения закона сохранения энергии:

$$K_0 = [1/(2n^2\omega) + 1].$$

Величина ρ характеризует поляризацию поля.

Величина $\alpha_n^{(K_0)}(\omega, \rho)$ представляет собой многофотонное сечение прямого процесса ионизации; оно определяется, исходя из известного выражения² для многофотонного матричного элемента

$$\alpha_n^{(K_0)} = 2\pi \left| \frac{1}{2K_0} \sum_{k, f, \dots s} \frac{(\mathbf{re})_{nk}}{(\omega_{kn} - \omega)} \frac{(\mathbf{re})_{kf} \dots (\mathbf{re})_{sp}}{(\omega_{fn} - 2\omega) \dots (\omega_{sn} - (K_0 - 1)\omega)} \right|^2 N_p,$$

$$\mathbf{e} = \frac{\vec{\xi}}{\xi},$$

где N_p — плотность конечных состояний электрона в непрерывном спектре.

Специфика данной задачи заключается в упрощении формул для многофотонных матричных элементов ввиду простоты аналитических выражений для квазиклассических матричных элементов $(\mathbf{re})_{kf}$ (см. гл. 2) и энергетических знаменателей, входящих в многофотонный матричный элемент.

Вместо рассмотрения общего случая обратимся сначала к простейшему примеру двухфотонной ионизации. Будем характеризовать начальное состояние высоковозбужденного атома квантовыми числами nlm , причем $n \gg 1$. Считаем, что частота внешнего линейно поляризованного поля ω удовлетворяет условию

$$\omega < \frac{1}{2n^2} < 2\omega, \quad (12)$$

при котором однофотонная ионизация запрещена законом сохранения энергии. Таким образом, по порядку величины $\omega \sim 1/n^2$.

Согласно дипольным правилам отбора для двухфотонных переходов в конечном состоянии орбитальный момент $l' = l \pm 2$. Для определенности рассмотрим более детально один из этих переходов, скажем, с $l' = l + 2$. Как и в предыдущей главе, мы предположим, что внешнее поле линейно поляризовано вдоль оси z . После стандартного отделения угловых переменных в двухфотонном матричном элементе и усреднения вероятности (12) по магнитному квантовому числу m исходного состояния остается проблема суммирования по промежуточным состояниям n' в двухфотонном матричном элементе. Сумма по n' в квазиклассическом приближении состоит из слагаемых в окрестности значений, где резонансный знаменатель $\omega_{n'n} - \omega \approx 0$. Когда расстройка резонанса мала, в сумме (12) доминирует только одно слагаемое. В этом случае его и нужно сохранить, а для однофотонных матричных элементов подставить квазиклассические значения (см. гл. 2).

В более общем случае межрезонансных промежутков при суммировании нужно учитывать только изменение малых энергетических знамена-

телей. Числители в (12) выносятся в точку $\omega_{n'n} = \omega$. При этом мы полагаем, что орбитальное квантовое число $l \ll n$, p^{-1} . В противном случае один из дипольных матричных элементов будет экспоненциально мал. Условие малости орбитального момента согласуется с условиями практики, когда высоковозбужденное состояние достигается путем однофотонного возбуждения с помощью монохроматического лазерного поля из основного или низколежащих атомных состояний. Оно обеспечивается правилами отбора для однофотонных переходов по орбитальному моменту.

Полагая в (12) $K_0 = 2$ и подставляя для матричных элементов квазиклассическую оценку из ⁶ для случая $\Delta n \sim n$, в итоге из (12) находим

$$\alpha_{nl \rightarrow p l+2}^{(2)} = \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} \frac{l^8}{540\pi^5 \omega^4 n^3} \times \\ \times \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi n}{\sqrt{1-2\omega n^2}} \right) \left[K_{2/3} \left(\frac{2}{3} l^3 \omega \right) + K_{1/3} \left(\frac{2}{3} l^3 \omega \right) \right]^4; \quad (13)$$

здесь $K_s(x)$ — функция Макдональда, p — импульс электрона в конечном состоянии. В частности, для ионизации S-состояния ($l = 0$) из (13) находим

$$\alpha_{n0 \rightarrow p2}^{(2)} = \frac{3^{5/3} \Gamma^4(2/3)}{4320\pi^5 n^3 \omega^{20/3}} \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi n}{\sqrt{1-2\omega n^2}} \right). \quad (14)$$

Оценка величин (13) и (14) при $p \sim n^{-1}$ и $\omega \sim n^{-2}$ имеет следующий вид:

$$\alpha_{nl}^{(2)} = \operatorname{const} \cdot n^{31/3}. \quad (15)$$

Для переходов с $l' = l - 2$ и $l' = l$ получаются выражения, аналогичные (13). Далее определенное сечение двухфотонной ионизации, просуммированное по l' и усредненное по орбитальным квантовым числам l исходного n -го уровня в предположении равновозаселенности всех подсостояний n -го уровня. Используя (13), нетрудно получить ¹⁵

$$\alpha_n^2 = \frac{0,1}{\pi n^5 \omega^{22/3}} \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi n}{\sqrt{1-2\omega n^2}} \right). \quad (16)$$

Буквенная оценка величины (16) при $\omega \sim n^{-2}$ имеет вид

$$\alpha_n^{(2)} = \operatorname{const} \cdot n^{29/3}. \quad (17)$$

Выше мы предполагали, что $\omega < 1/(2n^2)$, т. е. однофотонная ионизация запрещена законом сохранения энергии. Теперь обратимся к случаю $\omega > 1/(2n^2)$. Тогда наряду с двухфотонной ионизацией идет и обычная однофотонная ионизация, сечение которой описывается известной формулой Крамерса (см., например, ⁹). В обозначениях формулы (12) для $K_0 = 1$ имеем

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{2}{3 \sqrt{3} \omega^4 n^5}. \quad (18)$$

Что касается двухфотонного матричного элемента, то, по сравнению с предыдущим случаем $\omega < 1/(2n^2)$, при $\omega > 1/(2n^2)$ в нем возникает дополнительное слагаемое, а именно мнимая часть, так как для состояний n' в непрерывном спектре следует заменить

$$\omega_{n'n} - \omega \rightarrow \omega_{n'n} - \omega + i\delta.$$

Ее вклад в двухфотонное сечение процесса легко вычисляется, используя квазиклассические матричные элементы (см. гл. 2). В результате оказывается, что мнимая часть доминирует над вещественной (т. е. над интегралом в смысле главного значения), причем $\alpha_n^{(2)}$ определяется соотношением (16) с заменой $\operatorname{ctg}^2(\dots) \rightarrow 1$ (см. ¹⁶).

Мнимая часть двухфотонного матричного элемента соответствует каскадному переходу $n \rightarrow p' \rightarrow p$ через реальное (а не виртуальное) состояние p' . Из сказанного выше ясно, что каскадная вероятность двухфотонной ионизации является определяющей.

Итак, из проведенного анализа можно сделать следующий вывод. В межрезонансных промежутках двухфотонная ионизация определяется переходами, при которых промежуточные состояния близки к среднему между начальным и конечным состояниями, а орбитальные квантовые числа малы по сравнению с соответствующими главными квантовыми числами. Лишь в случае малой расстройки какого-либо атомного перехода с частотой внешнего поля в сумме промежуточным состояниям следует оставить только резонансное слагаемое.

Обратимся теперь к вопросу о применимости теории возмущений для расчета сечений многофотонных процессов из высоковозбужденных состояний. Для этого, очевидно, нужно рассмотреть открытый канал однофотонной ионизации и сравнить вероятность двухфотонной ионизации, пропорциональную величине (16) (с $\text{ctg}^2(\dots) \rightarrow 1$), и вероятность однофотонной ионизации, пропорциональную величине (18). Приравнявая отношение вероятностей единице, мы определяем поле $\mathcal{E}_0$, при котором нарушается применимость теории возмущений:

$$\mathcal{E}_0 = 3,5 \omega^{5/3}. \quad (19)$$

В частности, при $\omega = 1/2 n^2$ из (19) находим

$$\mathcal{E}_0 = 1,1 \cdot n^{-10/3}. \quad (20)$$

Значение $\omega = 1/2 n^2$ является минимальным значением, при котором открыт канал однофотонной ионизации.

Если $\omega > 1/2 n^2$, то поле $\mathcal{E}_0$, при котором нарушается теория возмущений, как видно из (19), увеличивается. Это отражает просто тот факт, что чем больше частота при фиксированной напряженности поля, тем меньше возмущение, производимое полем: это видно из формул (16) и (18), где частота ω входит в высокой степени в знаменатель. Итак, выражение (20) представляет собой минимальный порог применимости теории возмущений для двухфотонной ионизации.

При переходе к более высоким порядкам теории возмущений алгебра выкладок становится более громоздкой¹⁶. Тем более это относится к n -м порядкам теории возмущений, учет которых необходим при расчете вероятности ионизации полем с частотой $\omega \sim n^{-3}$.

Однако в условиях, когда степень нелинейности процесса ионизации (степень многофотонности) велика, т. е. $K_0 \gg 1$, соответствующие общие выражения¹⁶ можно упростить. Для многофотонного сечения прямого процесса ионизации в поле линейной поляризации получается следующее выражение¹⁷:

$$\alpha_n^{(K_0)} = \frac{2,4\omega^{-2/3}}{8\pi^2 c K_0^{3/2} (2K_0 + 1) n^5} \left(\frac{7,05 n^2}{\omega^{2/3}} \right)^{2K_0}.$$

Выражение для $\alpha_n^{(K_0)}$ в случае циркулярно поляризованного поля, также полученное в¹⁷, отличается от вышеприведенного лишь незначительным численным фактором.

Из соотношения для многофотонного сечения можно определить характерное атомное поле $\mathcal{E}_a$ для процесса многофотонной ионизации как такое поле, при котором вероятность процесса $(K_0 + 1)$ -порядка становится сравнимой с вероятностью процесса K_0 -порядка. Легко показать, что при

линейной поляризации внешнего поля

$$\mathcal{E}_a = \frac{\omega^{2/3}}{7,05n^2}.$$

При $\omega = \Omega = n^{-3}$ отсюда получаем

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{7,05n^4}. \quad (21)$$

При циркулярной поляризации излучения величина численного фактора в знаменателе равна 7,69.

Следует отметить очень резкую зависимость вероятности ионизации от напряженности поля при больших K_0 . Эта зависимость носит пороговый характер, так что при $\mathcal{E} < \mathcal{E}_a$ процесс ионизации носит существенно многофотонный характер и характеризуется степенью нелинейности K_0 .

5. ТУННЕЛЬНАЯ ИОНИЗАЦИЯ ВЫСОКОВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

В предыдущей главе мы детально рассмотрели двухфотонную ионизацию высоковозбужденных атомных состояний и кратко упомянули о многофотонной ионизации этих состояний. Согласно общей теории ⁴ многофотонная ионизация реализуется при условии $\gamma = (\omega/n\mathcal{E}) \gg 1$, т. е. при достаточно больших частотах внешнего поля (при фиксированной напряженности). В этой главе мы обращаемся к противоположному случаю

$$\gamma = (\omega/n\mathcal{E}) \ll 1. \quad (22)$$

Так как напряженность внешнего поля мы предполагаем не превосходящей атомную напряженность n^{-4} (см. далее), то указанное условие означает, что $\omega \ll \Omega$ (см. формулу (2)). Тогда имеет место туннелирование электрона через медленно меняющийся со временем потенциальный барьер и задача теории заключается в том, чтобы определить вероятность такого туннелирования в единицу времени.

Решение указанной задачи для основного состояния атома водорода ($n = 1$) хорошо известно ²:

$$w_1 = 4 \sqrt{\frac{3}{\pi\mathcal{E}}} \exp\left(-\frac{2}{3\mathcal{E}}\right). \quad (23)$$

Оно получается путем усреднения вероятности туннелирования из основного состояния в постоянном электрическом поле по периоду действия внешнего поля $T = 2\pi/\omega$, если заменить $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \cos \omega t$ и использовать для расчета вероятности метод перевала.

При переходе от основного к высоковозбужденным состояниям мы исходим из известных выражений для вероятности туннелирования в постоянном поле ¹⁸. Действуя аналогично выводу (23), для вероятности туннелирования в переменном поле в единицу времени находим

$$w_n = \sqrt{3\mathcal{E}/\pi n^3} w_{n,\mathcal{E}=\text{const}} = \\ = \sqrt{\frac{3\mathcal{E}}{\pi n^3}} \left(\frac{4}{n^3\mathcal{E}}\right)^{n-n_1+n_2} \frac{\exp[-2/(3\mathcal{E}n^3) + 3(n_1-n_2)]}{2n_2!(n-n_1-1)!}; \quad (24)$$

здесь $n_1 < n_2$ — параболические квантовые числа, характеризующие исходное состояние атома и сохраняющиеся в пределе $\omega \rightarrow 0$. Можно проверить, что величина (24) мала при условии $\mathcal{E} \ll n^{-4}$.

Если речь идет о высоковозбужденных состояниях сложных атомов, характеризующихся определенным орбитальным квантовым числом l и магнитным квантовым числом m , то для вероятности туннельной ионизации

в единицу времени в переменном поле находим

$$\begin{aligned}
 w_n &= \sqrt{3\mathcal{E}/\pi n^3} w_n, \mathcal{E}=\text{const} = \\
 &= \sqrt{3\mathcal{E}/\pi n^3} \cdot 2^{2n-|m|-1} (2l+1) (l+|m|)! \times \\
 &\times [(n+l)! (n-l-1)! (|m|)! (l-|m|)!]^{-1} \times \\
 &\times (2/\mathcal{E}n^3)^{2n-|m|-1} \exp(-2/3\mathcal{E}n^3) \quad (25)
 \end{aligned}$$

(здесь нужно подразумевать $n \rightarrow n^*$). Эта формула справедлива, когда возмущение $n^2\mathcal{E}$ мало по сравнению с энергетическими расстояниями между уровнями рассматриваемого атомного мультиплета, чтобы орбитальный момент l оставался хорошим квантовым числом при включении поля.

Обратим внимание на очень большой предэкспоненциальный множитель в формулах (24) и (25), который отсутствует в случае ионизации из короткодействующей ямы. В то же время показатели экспоненты в случае кулоновского потенциала и потенциала короткодействующей ямы при одинаковой энергии рассматриваемого уровня одинаковы. Отметим, что именно благодаря учету этого предэкспоненциального фактора атомное поле $\mathcal{E}_a$, при котором туннельная ионизация происходит за характерные атомные времена, в кулоновском случае имеет порядок величины E_n^2 , где E_n — энергия ионизируемого состояния. В то же время в случае короткодействующего потенциала атомное поле определяется лишь показателем экспоненты в вероятности ионизации и имеет, очевидно, порядок величины $E_n^{3/2}$.

При $n \gg 1$ зависимости вероятностей (24) и (25) от $\mathcal{E}$ носят очень резкий характер и представляют собой практически ступенчатые функции. Атомные поля, определяющие местоположение такой ступеньки, как легко видеть из (24), (25), такие же, что и в случае ионизации постоянным полем. Согласно ¹ имеем

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{Cn^4}, \quad (26)$$

где величина $C(n_1, n_2)$ изменяется при изменениях n_1, n_2 : $0 \leq n_1, n_2 \leq n-1$ — от 4,5 до 9,2.

Интересно сопоставить величину атомного поля для туннельного (26) и многофотонного (21) механизмов ионизации высоковозбужденных состояний. Из соотношений (21) и (26) видно, что эти величины одного порядка. Не вызывает сомнения, что и в промежуточном случае, когда $\gamma \sim 1$, атомное поле имеет тот же порядок величины.

В работе ¹⁹ показано, что в действительности результат (24) справедлив при условии, более жестком, нежели (22), а именно при условии

$$\frac{\omega^2}{n\mathcal{E}^2} \ll 1.$$

При выполнении только лишь условия (22) оказывается существенным расщепление исходного энергетического терма на квазиэнергетические уровни (аналог линейного эффекта Штарка для постоянного поля), туннелирование из которых оказывается различным. Соответствующие формулы весьма громоздки. Они приведены в работе ¹⁹. Результат (25) не изменяется, так как соответствующие квазиэнергетические состояния в переменном поле порождаются лишь квадратично зависящим от напряженности поля временным возмущением.

6. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОНА В ПЕРЕМЕННОМ ПОЛЕ

а) В в е д е н и е

Основной особенностью обсуждавшегося выше многофотонного и туннельного механизмов ионизации является их чисто квантовая природа. Однако при $n \gg 1$ высоковозбужденный атом является квазиклассической системой, и для описания воздействия внешнего поля на электрон можно использовать законы классической механики. Хорошо известно, что к ионизации атома в рамках классической механики может привести процесс надбарьерного перехода. По аналогии со случаем внешнего постоянного электрического поля физически такой процесс соответствует надбарьерному переходу электрона из потенциальной ямы в непрерывный спектр под

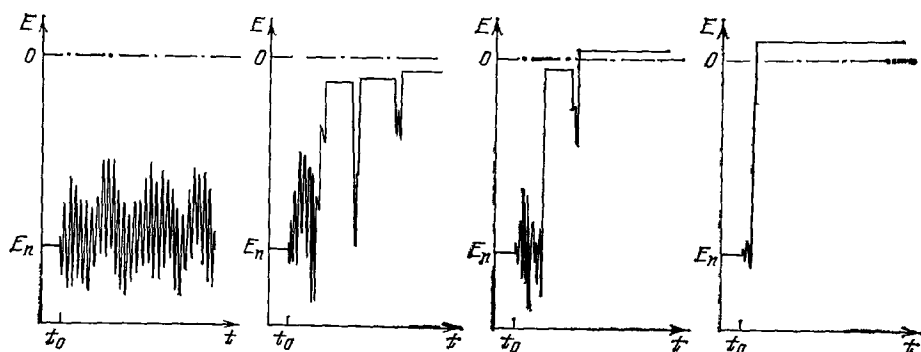


Рис. 3. Результат моделирования на ЭВМ процесса возникновения стохастической неустойчивости электрона в высоковозбужденном атоме и диффузионной ионизации атома ²².

Напряженность внешнего поля $\mathcal{E}$ возрастает слева направо. E — энергия связи электрона в атоме, t — время действия поля.

действием поля с частотой $\omega \ll n^{-3}$. В этом случае ионизация происходит приблизительно за время одного оборота по невозмущенной орбите $\sim n^3$. Такая надбарьерная ионизация возможна только в случае достаточно высокой напряженности переменного поля, такой же, как атомная напряженность в постоянном поле (26) ¹.

Однако очевидно, что наибольший интерес представляют частоты ω порядка кеплеровой частоты обращения электрона по орбите $\Omega = n^{-3}$, так как при этом действие переменного поля на электрон носит резонансный характер.

Оказывается, что в поле достаточно сильной (однако еще при $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_a$) строго монохроматической волны с $\omega \sim \Omega$ нелинейные колебания электрона (частота невозмущенных колебаний Ω зависит от главного квантового числа n) становятся стохастическими ²⁰, что приводит к диффузионной ионизации атома. Здесь следует подчеркнуть, что диффузия в системе возникает не за счет случайного характера внешнего электромагнитного поля, которое строго монохроматично, а за счет нелинейности классических уравнений движения. Впервые механизм диффузионной ионизации рассматривался в работе ²¹. Явление диффузионной ионизации, обусловленное стохастичностью, было обнаружено в численных экспериментах ²². Оценка порога стохастичности была впервые получена аналитически в работе ²³.

В этом месте нам хотелось бы еще раз подчеркнуть качественное отличие диффузионной ионизации от многофотонной (рис. 3). Действительно,

диффузионное возбуждение соответствует *постепенному* росту энергии классического электрона от начального значения до ионизационного. Характерное время такого возбуждения τ_D существенно превышает период обращения по невозмущенной орбите: $\tau_D \gg n^3$ (см. гл. 7). Поэтому через время τ , составляющее несколько периодов обращения ($\tau \ll \tau_D$), вероятность классической диффузионной ионизации будет еще равна нулю (электрон не успеет набрать достаточное количество энергии). При квантовом рассмотрении уже через время $\tau \sim n^3$ есть отличная от нуля вероятность ионизации $W = w_n \tau$, где w_n — вероятность многофотонной ионизации в единицу времени.

Для возникновения стохастичности, приводящей к диффузионному возбуждению атома, требуется выполнение критерия перекрытия нелинейных резонансов^{20, 24, 25}. Это приводит к существованию резкой границы для напряженности внешнего поля, оценка которой была получена в работе²³. При полях, превышающих это критическое значение, $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$, происходит диффузионное возбуждение атома (вплоть до ионизации), а при $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$ энергия классического электрона колеблется в ограниченных пределах, причем амплитуда этих колебаний уменьшается с уменьшением $\mathcal{E}$ (см. рис. 3).

б) Нелинейный резонанс для круговых орбит

Рассмотрим, как деформируется круговая орбита электрона под действием слабого линейно поляризованного монохроматического поля. Поскольку круговое движение является чисто гармоническим, то гамильтониан системы в переменном электрическом поле $\mathcal{E} \cos \omega t$ имеет простой вид:

$$H = -\frac{1}{2n^2} + \mathcal{E} n^2 \cos \omega t \cdot \cos \lambda; \quad (27)$$

здесь принято, что вектор напряженности поля параллелен плоскости орбиты; n, λ — канонически сопряженные переменные: классическое действие и угол; гамильтониан (27) представляет собой сумму невозмущенной энергии и дипольного взаимодействия поля с атомным электроном; λ — фаза орбитального движения электрона, которая в случае круговой орбиты совпадает с углом между радиусом-вектором электрона и направлением вектора напряженности поля. При этом в (27) принято, что орбитальный момент электрона l постоянен. Это приближение оказывается справедливым в силу того, что скорость изменения $\dot{l} \sim \mathcal{E}$ в слабом поле существенно меньше $\dot{n} \sim \mathcal{E}^{1/2}$ (см. ниже).

Наибольшее изменение $\Delta n = n - n_0$ (где n_0 характеризует начальное состояние электрона) возмущение в (27) вызывает в случае резонанса частоты поля ω с частотой кеплерова движения электрона $\Omega = n^{-3}$. Разлагаем невозмущенную часть гамильтониана (27) вблизи резонансного значения $n_r = \omega^{-1/3}$ и оставляем в возмущении только медленно меняющиеся члены. Для того чтобы исключить явную зависимость гамильтониана от времени, введем новую фазу $\theta = \lambda - \omega t$ и сопряженное с ней новое действие $I = n - n_r$. В новых переменных гамильтониан (27) с точностью до постоянного слагаемого принимает вид

$$H_r(I, \theta) = -\frac{3I^2}{2n_r^4} + \frac{1}{2} \mathcal{E} n_r^2 \cos \theta. \quad (28)$$

Новый гамильтониан не зависит явно от времени и поэтому сохраняется. Ввиду одномерности системы (28) это означает ее интегрируемость. Уравнения движения, получаемые из (28), совпадают с уравнениями движения

физического маятника с «массой»

$$M = \left| \frac{d\Omega}{dn} \right|^{-1} = \frac{1}{3} n_r^4.$$

Область нелинейного резонанса соответствует колебаниям «маятника» (ограниченное изменение фазы θ) и расположена внутри сепаратрисы, отделяющей колебательное движение от вращения. Частота малых (по сравнению с размером сепаратрисы) колебаний «маятника» равна

$$\Omega_\phi = \left(\frac{1}{2M} \mathcal{E} n_r^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{n_r} \left(\frac{3}{2} \mathcal{E} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

Эта величина определяет частоту пульсаций ($\Omega_\phi \ll \Omega$) орбиты электрона в поле, если начальные значения $I_0 = n_0 - n_r$ и $\theta_0 = \lambda_0$ находятся вблизи положения равновесия маятника: $I_s = 0$, $\theta_s = 0$. Энергия электрона при этом также пульсирует со временем с частотой Ω_ϕ . Рассмотренное явление лежит в основе принципа автофазировки частиц в кольцевых ускорителях.

Подобные осцилляции энергии наблюдались в численных экспериментах с классическим атомом в циркулярно поляризованном поле²⁶.

Число уровней, попадающих в нелинейный резонанс, $(\Delta n)_r$ определяется шириной сепаратрисы по действию. Согласно условию $H_r = -\frac{1}{2} \mathcal{E} n_r^2$ имеем

$$I = \pm \left(\frac{2}{3} \mathcal{E} \right)^{1/2} n_r^3 \cos \left(\frac{1}{2} \theta \right),$$

откуда и определяем ширину нелинейного резонанса по действию I :

$$(\Delta n)_r = 2 \left(\frac{2}{3} \mathcal{E} \right)^{1/2} n_r^3 = 4\Omega_\phi M. \quad (30)$$

Из (30) можно получить также полуширину нелинейного резонанса по частоте:

$$\Delta \nu = \frac{(\Delta n)_r}{2M} = 2\Omega_\phi, \quad (31)$$

которая нам понадобится в дальнейшем.

Рассмотренное выше приближение нелинейного резонанса справедливо при выполнении условий $(\Delta n)_r \ll n_r$ и $\Omega_\phi \ll \Omega$, что накладывает ограничение на внешнее поле: $\mathcal{E} \ll n_r^4$. Из (30) с учетом (29) можно получить, что требование $(\Delta n)_r \gg 1$, необходимое для выполнения классичности, реализуется при $\mathcal{E} \gg n_r^{-6}$. Таким образом, можно сделать вывод, что при полях

$$n_r^{-6} \ll \mathcal{E} \ll n_r^4$$

происходят ограниченные пульсации классической орбиты электрона, не выходящие за пределы сепаратрисы нелинейного резонанса.

Если же сначала электрон находится вне области нелинейного резонанса $|\omega - \Omega| \gg \Omega_\phi$, то амплитуда его осцилляций оказывается существенно меньше:

$$\Delta n \sim \frac{\mathcal{E} n_0^2}{|\omega - \Omega|} \sim \mathcal{E} n_0^5$$

при $|\omega - \Omega| \sim \Omega = n_0^{-3}$.

в) Перекрытие резонансов для вытянутых орбит

Рассмотрим теперь противоположный случай совершенно вытянутых орбит, эксцентриситет которых

$$e = \left(1 - \frac{l^2}{n^2} \right)^{1/2} = 1.$$

При этом мы будем считать вектор напряженности электрического поля параллельным орбите электрона. Тогда гамильтониан системы имеет вид

$$H = -\frac{1}{2n^2} + \mathcal{E}n^2 \cos \omega t \left(-\frac{3}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cos k\lambda \right), \quad (32)$$

где

$$n^2 x_k = \frac{n^2}{k} J'_k(ke) \quad (33)$$

— компоненты Фурье дипольного момента электрона ²³, $e = 1$.

Условие резонанса $\omega = k\Omega_k = kn_k^3$ определяет резонансные значения n_k . Аналогично случаю круговой орбиты, рассмотренному выше, оставляем в гамильтониане (32) только резонансный член. По аналогии с формулой (30) получаем полуширину сепаратрисы резонанса по частоте ²⁵.

$$\Delta\nu_k = \frac{2}{n_k} (3\mathcal{E}x_k)^{1/2}, \quad (34)$$

определяющую характерные частоты пульсаций электрона во внешнем поле на фоне невозмущенной частоты обращения Ω_k .

Определим теперь критическое поле $\mathcal{E}_c$, при котором происходит перекрытие k -го и $(k+1)$ -го нелинейных резонансов, приводящее к стохастическому блужданию электрона. Для этого введем параметр s , характеризующий степень перекрытия соседних резонансов:

$$s = \frac{\Delta\nu_k + \Delta\nu_{k+1}}{\Omega_k - \Omega_{k+1}}. \quad (35)$$

При $s \ll 1$ влиянием соседних резонансов можно пренебречь, а ограниченные колебания электрона могут быть описаны в приближении одного изолированного нелинейного резонанса, как это было сделано в п. б).

Значение $s = 1$ соответствует касанию сепаратрис невозмущенных резонансов. Согласно результатам работы ²⁵ траектория начинает случайно переходить из одного резонанса в другой при выполнении условия

$$K \approx 2,5s^2 = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} > 1. \quad (36)$$

Здесь полуэмпирический численный множитель учитывает резонансы высших гармоник, искажение невозмущенных сепаратрис под действием соседних резонансов, а также конечную ширину стохастического слоя, возникающего вблизи невозмущенной сепаратрисы. Этот множитель слабо зависит от вида рассматриваемой системы и, как показали численные эксперименты ²⁵, меняется для различных моделей в интервале 2,2—2,5. В дальнейшем мы примем значение 2,5, соответствующее так называемому стандартному отображению ²⁵ (см. также ²⁹).

Используя условие резонанса $\omega = k\Omega_k$ и соотношения (34) — (36), получим величину критического поля для случая $l = 0$:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{\gamma_k n^4}, \quad (37)$$

где

$$\gamma_k = 30(k+1)^2 \left[|x_k|^{1/2} + |x_{k+1}|^{1/2} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-1/3} \right]^2. \quad (38)$$

Для основного резонанса $k = 1$ из (37), (38) находим

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{84n^4}. \quad (39)$$

Значение $\mathcal{E}_c$ согласно (39) оказывается в три раза меньше оценки, полученной в работе ²³, и дает, по-видимому, минимальное значение поля, при котором начинается стохастическое возбуждение электрона.

При $k \gg 1$, используя асимптотическое значение выражения (33) $x_k \approx 0,4k^{5/3}$, из (37), (38) находим

$$\mathcal{E}_c \approx \frac{1}{49 (\omega n^3)^{1/3} n^4}. \quad (40)$$

Фактически асимптотическое поведение начинается уже с $k = 5$.

Таким образом, с увеличением частоты $\omega = k\Omega_k$ при заданном начальном значении n порог возникновения стохастичности понижается. Причина этого заключается в сближении нелинейных резонансов при увеличении k и достаточной медленности падения высших гармоник дипольного момента.

При $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$ происходит перекрытие ближайших резонансов. Резонансы, лежащие выше по n , соответствуют большим значениям k и согласно (40), тем более, перекрываются. В результате начинается диффузионное возбуждение электрона (см. гл. 7). При этом каждая отдельная траектория является очень сложной и запутанной, а близкие траектории экспоненциально быстро расходятся со временем. Характерное время стохастизации порядка ширины нелинейного резонанса $\tau_c \sim \Delta\omega_k^{-1}$. При $k \sim 1$ время $\tau_c \sim \Omega^{-1}$.

При $k \gg 1$ и $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_c$ резонансная часть возмущения в гамильтониане (32) оказывается в k^2 раз меньше невозмущенной части этого гамильтониана. Этот факт обуславливает применимость использованного приближения и полученного значения критического поля (40). Отметим также, что при $k \gg 1$ сетка резонансов становится однородной ($\Omega_k - \Omega_{k+1} \approx \Omega_{k+1} - \Omega_{k+2}$) и локально может быть описана стандартным отображением ²⁵, что и определило выбор численного множителя в (36).

Менее приятным для теории является случай $k \sim 1$, когда буквенная малость возмущения отсутствует. Тем не менее численная малость возмущения по отношению к невозмущенному гамильтониану (порядка $1/42$ для $k = 1$) обуславливает применимость полученных выражений (37) — (39) для критического поля.

г) О б щ и й с л у ч а й

Рассмотрим теперь случай произвольной орбиты. Гамильтониан электрона в поле кулоновского центра и монохроматическом внешнем электромагнитном поле, записанный в переменных действие — угол невозмущенной задачи, имеет вид

$$H = -\frac{1}{2n^2} + \mathcal{E}n^2 \cos \omega t \left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)^{1/2} \times \\ \times \left[-\frac{3}{2} e \sin \varphi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (x_k \sin \psi \cos k\lambda + y_k \cos \psi \sin k\lambda) \right] \quad (41)$$

здесь l и m — угловой момент электрона и его проекция на направление вектора напряженности внешнего поля $\mathcal{E}$; ψ и φ — сопряженные им углы Эйлера ³⁰; величины x_k (см. формулу (33)) и

$$n^2 y_k = \frac{n^2 \sqrt{1-e^2}}{ke} J_k(ke) \quad (42)$$

представляют собой компоненты Фурье дипольного момента электрона ²⁸. Величина e — эксцентриситет орбиты. Проекция m углового момента является интегралом движения.

Поскольку частота изменения l и ψ пропорциональна $\mathcal{E}$, то она оказывается существенно меньше частоты изменения величин n и $\theta = \lambda - \omega t$, пропорциональной $\mathcal{E}^{1/2}$ при условии резонанса $\omega = k\Omega_k$ (см. выше). Поэтому можно выделить быструю (n, θ) и медленную (l, ψ) подсистемы, что позволяет осуществить в гамильтониане (41) резонансное приближение, аналогично тому, как это было сделано выше для вытянутых орбит.

Аналогично тому, как находилось критическое поле для вытянутых орбит, можно получить, что в данном случае величина критического поля определяется выражением (37), причем

$$\gamma_k = 30(k+1)^2 \left[\sqrt{r_k} + \frac{\sqrt{r_{k+1}}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{1/3}} \right]^2 \left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)^{1/2}; \quad (43)$$

здесь $2r_k^2 = x_k^2 + y_k^2$ и для простоты принято среднее значение

$$\langle \sin^2 \psi \rangle = \langle \cos^2 \psi \rangle = \frac{1}{2}.$$

Вообще говоря, при этом значение $\mathcal{E}_c$ может завышаться в $\sqrt{2}$ раз, если $x_k \ll y_k$ или $x_k \gg y_k$.

Из асимптотического поведения компонент Фурье x_k и y_k при $k \gg 1$ следует²⁸, что перекрытие резонансов происходит только для сильно вытянутых орбит с эксцентриситетом $e \rightarrow 1$. Для орбит с меньшими эксцентриситетами величины x_k и y_k убывают экспоненциально с увеличением k . Такое экспоненциальное убывание отсутствует, а следовательно, орбиты стохастизируются, только для малых орбитальных моментов

$$l \leq l_c = \left(\frac{3}{\omega}\right)^{1/3}. \quad (44)$$

Зависимость критического поля $\mathcal{E}_c$ от l в случае $k \gg 1$ определяется из (37) и (43) и имеет вид

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{\kappa_l (n^3 \omega)^{1/3} (1 - m^2/l^2)^{1/2} n^4}, \quad l \leq l_c. \quad (45)$$

Мы не приводим громоздкого выражения для κ_l , получающегося из асимптотических формул для компонент Фурье x_k и y_k ²⁸. Отметим только, что величина κ_l весьма слабо зависит от l при $l \leq l_c$. Так, например, $\kappa_0 \approx 35$, а $\kappa_{l_c} \approx 22$.

В случае основного резонанса $k = 1$ зависимость $\mathcal{E}_c$ от l , согласно (43), также оказывается слабой. Так, при $l = n/2$ и $l = 3n/4$ из (43) находим, что $\mathcal{E}_c n^4 = 1/77$ и $1/80$ соответственно (при $m = 0$). Эти значения слабо отличаются от значения $1/84$ в формуле (39) для $l = 0$. Таким образом, при полях, превышающих критическое значение

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{77n^4}, \quad (46)$$

перекрытие резонансов происходит для большей части возможных значений l .

Вместе с тем для орбит с малым эксцентриситетом $e \ll 1$ амплитуда гармоник x_k, y_k с $k \geq 2$ оказывается очень малой ($\sim e^{-k}$). Поэтому при $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_c$ резонансы с $k = 2$ и $k = 3$ не перекрываются и ионизация из таких состояний сильно подавлена. Она может идти только за счет того, что из-за перекрытия резонансов с $k = 1$ и $k = 2$ появляются малые области стохастичности, по которым электрон может выйти в область с $e \sim 1$, и оттуда уже может произойти ионизация.

Согласно результатам численных экспериментов²⁵ при $K = (\mathcal{E}/\mathcal{E}_c) \approx \approx 1$ структура фазового пространства является очень сложным переплете-

нием устойчивой и стохастической компонент, мера которых приблизительно одинакова. Однако уже при $\mathcal{E} = 4\mathcal{E}_c$ мера устойчивой компоненты находится на уровне 10 %, и имеет место развитая стохастичность.

До сих пор мы рассматривали случай $k \gg 1$. При $k < 1$ резонансы по n отсутствуют. Тем не менее из-за конечной ширины лежащего выше резонанса с $k = 1$ траектория может попасть в область стохастичности этого резонанса. Так, например, для сильно вытянутых орбит при $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c$, согласно (34) и (39), получаем $\Delta\omega_1 = 0,22 \omega$. Отсюда следует, что эффективное возбуждение происходит, начиная с частот $\omega \geq 0,78 \Omega$. С увеличением поля до $\mathcal{E} = 5\mathcal{E}_c$ это значение достигает величины 0,52 Ω . Эти результаты согласуются с результатами численных экспериментов³¹, согласно которым при $\omega = 0,4 \Omega$ стохастическое возбуждение начинается в полях $\mathcal{E} = (5-6) \mathcal{E}_c$.

д) Стохастичность в низкочастотном поле

Интересно, что, несмотря на отсутствие резонансов по n при $k \ll 1$ и $\mathcal{E} \ll n^{-4}$, из-за наличия кеплерова вырождения (т. е. вырождения по l) также возникает стохастизация движения атомного электрона³². Обратимся в этом пункте к рассмотрению такой стохастизации. Детальное рассмотрение содержится в работе³², а здесь мы приведем лишь основные результаты.

Ввиду медленности изменения электрического поля удобно записать классический гамильтониан в переменных действие — угол, определяемых по движению частицы в параболических координатах для мгновенного значения поля. Помимо невозмущенной энергии, гамильтониан содержит линейный штарковский сдвиг, зависящий от времени как от параметра, и аналогичный квадратичный штарковский сдвиг. Оба сдвига выражаются через переменные действия, соответствующие параболическим квантовым числам атома водорода в постоянном электрическом поле. Наконец, в гамильтониан включается низкочастотное слагаемое, появляющееся из-за явной зависимости возмущения от времени.

В используемом приближении наряду с точным интегралом — проекцией углового момента на направление электрического поля — сохраняется и значение главного квантового числа n .

Критерий перекрывания нелинейных резонансов (36) выполнен при превышении критического поля³²

$$\mathcal{E}_c \approx \frac{(\omega n^3)^{1/5}}{2n^4} \ll \frac{1}{n^4} \quad (47)$$

в области параметров, когда выполняется условие

$$\omega n^3 \ll 1.$$

При $\omega/n \ll \mathcal{E} < \mathcal{E}_c$ параболические квантовые числа колеблются в ограниченном малом интервале вблизи своих начальных значений. Напротив, в случае $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$ они случайно меняются в интервале $[0, n - |m|]$, а плоскость орбиты случайным образом прецессирует вокруг направления поля.

Рассмотрим, к каким наблюдаемым эффектам приводит возникновение стохастичности. Пусть в начальный момент времени электрон находился на n -м уровне и имел параболические квантовые числа n_1, n_2 . При включении слабого поля $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$ значения n_1 и n_2 оказываются приближенными интегралами движения³³ (строгими интегралами движения они являются в постоянном поле). Поэтому спонтанные радиационные переходы будут

происходить только из этого состояния (n, n_1, n_2) в какие-то нижележащие атомные состояния. Совершенно другая картина возникает при $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$. В этом случае происходит перекрытие резонансов и значения n_1 и n_2 уже не являются интегралами движения. Через некоторое время после включения поля электрон с равной вероятностью будет иметь все наборы параболических квантовых чисел, удовлетворяющих условию $n_1 + n_2 = n - |m|$. Соответственно изменяются вероятности спонтанных радиационных переходов, и это изменение можно зарегистрировать. Аналогичным образом, при переходе от полей $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$ к полям $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$ изменяются вероятности ионизации этими полями, так как эти вероятности сильно зависят от квантовых чисел n_1, n_2 .

В заключение отметим, что согласно (47) при уменьшении ω , т. е. при стремлении к статическому пределу, критическое поле для стохастизации также уменьшается. Однако сама стохастичность развивается за все большие времена, а именно за времена $\tau_c \sim \omega^{-1}$.

е) Ц и р к у л я р н а я п о л я р и з а ц и я

Рассмотрим теперь случай циркулярно поляризованного излучения, исследовавшийся в работах ^{26, 27}. Качественно движение электрона оказывается таким же, как и в случае линейно поляризованного поля. Действительно, из-за медленности изменения l, m и сопряженных им углов динамика сильно вытянутых орбит по-прежнему описывается гамильтонианом (32). При этом мы считаем здесь, что орбита находится в плоскости поляризации излучения. Отсюда сразу следует, что величина $\mathcal{E}_c$ определяется, как и в линейно поляризованном поле, выражениями (37) — (40). При $k = 1$ получающееся значение критического поля (см. формулу (39)) оказывается приблизительно в 2,5 раза меньше значения, найденного в работе ²⁷. Как и в случае линейной поляризации, это отличие объясняется более точным учетом ширины нелинейных резонансов и расстояния между ними по частоте. Результат (39) оказывается близким к данным численных экспериментов ²⁶, в которых ионизация атома наблюдалась при $\mathcal{E}n^4 > 1/100$.

Обратимся теперь к общему случаю произвольно вытянутых орбит. При этом ограничимся двумерными траекториями, лежащими в плоскости поляризации внешнего поля. Действуя методом, аналогичным тому, как находилась критическая напряженность для линейно поляризованного поля, в данном случае получаем следующие результаты: при $k = 1$ и $l = 0, n/2, 3n/4$ соответственно

$$\mathcal{E}_c n^4 \approx \frac{1}{84}, \frac{1}{149}, \frac{1}{184}. \quad (48)$$

Таким образом, в циркулярно поляризованном поле при $k = 1$ наиболее легко стохастизируются орбиты с промежуточными величинами эксцентриситета. Критическое поле при этом имеет вид

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{\kappa_l (n^3 \omega)^{1/3} n^4}. \quad (49)$$

Величина κ_l , входящая в (49), оказывается слабо зависящей от l . Так, в частности, $\kappa_0 \approx 49$, а $\kappa_{lc} \approx 43$.

Для трехмерных орбит величина критического поля определяется тем же выражением (49) с несколько другой численной константой κ_l .

Вопрос о том, имеет ли место стохастичность в циркулярно поляризованном поле при $\omega n^3 \ll 1$, требует дальнейшего исследования.

Сделаем заключительные замечания о зависимости критического поля от определяющих его параметров. Прежде всего, с увеличением частоты, начиная со значения $\omega = \Omega = 1/n^3$, величина $\mathcal{E}_c$ уменьшается (см. (40), (45) и (49)). При уменьшении частоты от значения $\omega \ll 1/n^3$ величина критического поля также уменьшается (см. (47)). Обратимся теперь к зависимости $\mathcal{E}_c$ от орбитального момента l . Сначала рассмотрим случай частоты $\omega = 1/n^3$. Как видно из рассмотрения, предшествующего формуле (46), здесь зависимость $\mathcal{E}_c$ от l практически отсутствует, исключая значения l , близкие к n (орбиты с малым эксцентриситетом), для которых критические поля резко возрастают. Это заключение относится к линейно поляризованному полю. Напротив, в циркулярно поляризованном поле с ростом l критическое поле уменьшается (см. формулу (48)). Если $\omega \gg 1/n^3$ ($k \gg 1$), то как для линейного, так и для циркулярного полей критическое поле слабо изменяется при изменении $l \lesssim l_c$, а при $l > l_c$ резко возрастает.

Что касается зависимости $\mathcal{E}_c$ от степени поляризации внешнего поля, то, сравнивая (45) и (49), можно сделать определенное заключение для случая больших частот ($k \gg 1$): в циркулярном поле величина $\mathcal{E}_c$ несколько меньше, чем в линейно поляризованном поле. В случае $k \sim 1$ при $l = 0$ критическое поле не зависит от степени поляризации излучения; при $l > 0$ в циркулярном поле величина $\mathcal{E}_c$ оказывается меньше, чем в линейном. В приведенных выше фразах слово «меньше» означает примерно в 1,5—2 раза.

7. ДИФФУЗИОННАЯ ИОНИЗАЦИЯ

а) В в е д е н и е

В предыдущей главе были получены оценки для напряженности электрического поля $\mathcal{E}_c$, при котором происходит перекрытие нелинейных резонансов. При полях $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$ электрон начинает стохастически переходить из одного резонанса в другой, его траектория становится крайне сложной, случайной и непредсказуемой²⁵. Однако из-за стохастичности каждой отдельной траектории оказывается применимым статистическое описание процесса возбуждения атомного электрона^{24, 25, 34}. При этом во временной эволюции можно выделить два характерных масштаба времени — время стохастизации движения τ_c и время блуждания электрона по резонансам τ_D , которое, как мы увидим в дальнейшем, существенно превышает время τ_c . На временах, превышающих τ_c , распределение по фазам становится однородным, а эволюция функции распределения (число частиц с данным n в момент времени t) $f(n, t)$ по действию описывается уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова. При достаточно сильном перекрытии резонансов мера устойчивой компоненты оказывается пренебрежимо малой. Поэтому в системе имеет место детальное равновесие и недиффузионный поток в уравнении Фоккера — Планка — Колмогорова отсутствует³⁵. Вследствие этого оно сводится к обычному уравнению диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} \left(D_n \frac{\partial f}{\partial n} \right). \quad (50)$$

Задачей теории является вычисление коэффициента диффузии D_n в (50). Так как он зависит от n , то уравнение диффузии (50) описывает нелинейный диффузионный процесс.

б) Вычисление коэффициента диффузии

Следуя работе ³⁴, определим коэффициент диффузии в случае сильно вытянутых орбит ($l = 0$). Из гамильтониана (32) получаем уравнение для изменения n :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \sum_{|k|=1}^{\infty} F_k \cos(\omega_k t + \theta_k(t)); \quad (51)$$

здесь введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \mathcal{E} n^2 k x_k, \\ \omega_k &= k\Omega - \omega, \\ \theta_k(t) &= k(\lambda - \Omega t) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Фазы $\theta_k(t)$, введенные в (52), медленно изменяются со временем на масштабах порядка τ_c .

Интегрируя (51) по времени, получаем

$$\Delta n \equiv n - n_0 \approx \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{F_k}{\omega_k} \right) [\sin(\omega_k t + \theta_k) - \sin \theta_k]. \quad (53)$$

Возводя (53) в квадрат, учтем, что из-за стохастичности движения фазы $\theta_k(t)$ являются случайными величинами в интервале $[0, 2\pi]$. Следовательно, квадраты синусов и косинусов можно заменить на $1/2$, а первые степени тригонометрических функций положить равными нулю. Заменяя сумму на интеграл, получим

$$\overline{(\Delta n)^2} = \pi \left(\frac{F_k}{\Omega} \right)^2 t, \quad (54)$$

где резонансное значение $k = \omega/\Omega = \omega n^3$. Согласно общим соотношениям для одномерной диффузии имеем

$$\overline{(\Delta n)^2} = 2D_n t. \quad (55)$$

Сравнивая (54) и (55), получаем искомый коэффициент диффузии:

$$D_n = \frac{\pi}{2} \mathcal{E}^2 \omega^2 n^{13} x_k^2. \quad (56)$$

В частности, при $k \gg 1$ из (56), пользуясь асимптотическим выражением для x_k , находим

$$D_n \approx 0,65 \mathcal{E}^2 n^3 \omega^{-4/3}, \quad (57)$$

в то время как при $k = 1$ из (56) имеем

$$D_n \approx 0,17 \mathcal{E}^2 n^7. \quad (58)$$

В общем случае произвольного эксцентриситета орбиты вычисление коэффициента диффузии производится аналогичным образом. Значение D_n получается из (56) путем замены

$$x_k^2 \rightarrow \frac{1}{2} (x_k^2 + y_k^2) \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right).$$

Для двумерных орбит в циркулярно поляризованном поле в формуле (56) следует сделать замену $x_k^2 \rightarrow x_k^2 + y_k^2$. В качестве оценки формула (56) может быть использована и для трехмерных орбит. Во всех этих случаях в асимптотическом пределе $k \gg 1$ получаем выражение типа (57) с близким численным множителем.

Оценка для времени τ_D , за которое в результате диффузии атом ионизуется, может быть получена из условия $(\Delta n)^2 \sim n^2$ (см. (55)), где n характеризует главное квантовое число исходного состояния электрона. Следовательно, из (55) получаем

$$\tau_D \approx \frac{n^2}{2D_n}. \quad (59)$$

Обратная величина $w_D = \tau_D^{-1}$ может быть названа вероятностью диффузионной ионизации. При этом, однако, нужно иметь в виду, что

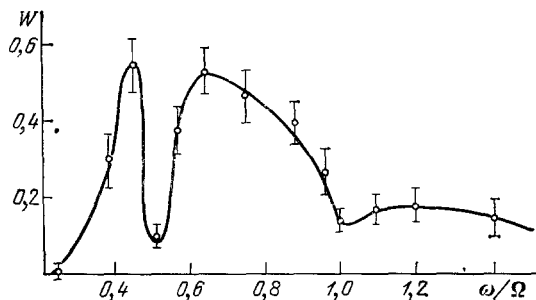


Рис. 4. Результат численного расчета ³¹ доли ионизованных частиц W как функции частоты внешнего поля.

По оси абсцисс отложена величина ω/Ω . Время действия поля взято равным $300 \pi n^3$, а напряженность поля $\xi = 1/12 n^4$.

при $t \ll \tau_D$ доля ионизовавшихся частиц равна нулю, а не $w_D t$. Из (57) получаем оценку

$$w_D \sim \xi^2 n \omega^{-4/3}, \quad \omega n^3 \gg 1. \quad (60)$$

В линейно поляризованном поле при $\omega n^3 \approx 1$ вероятность ионизации

$$w_D \approx \frac{2D_n}{n^2} = \frac{1}{3} \xi^2 n^5. \quad (61)$$

В частности, при $k = 1$ и для значений $\xi n^4 = 1/77$ и $1/12$ получаем $\tau_D = 2 \cdot 10^4 n^3$ и $\tau_D = 460 n^3$ соответственно. Мы видим, что время τ_D существенно превышает время оборота электрона n^3 по кеплеровой орбите в соответствии с общими утверждениями в начале этой главы.

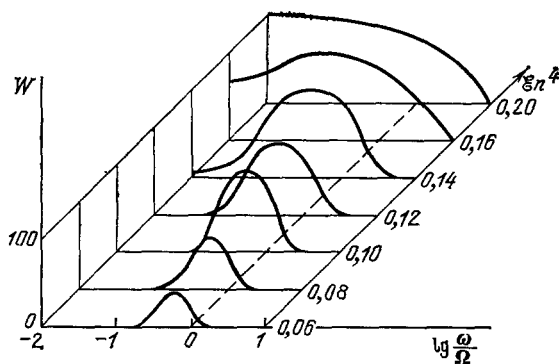


Рис. 5. Результат численного расчета ³¹ доли ионизованных частиц W как функции напряженности внешнего поля ξ (в единицах n^4) и частоты поля ω (в единицах Ω).

В численных экспериментах ³¹ для линейно поляризованного поля с напряженностью $\xi n^4 \approx 1/12$ было найдено, что при $k \approx 1$ ($\omega \approx \Omega$) и времени действия поля $T = 300 \pi n^3$ доля ионизованных частиц составляет примерно 40% (рис. 4). Приведенные выше оценки хорошо согласуются с результатами численных экспериментов.

Зависимость τ_D от напряженности поля ξ и частоты ω также качественно согласуется с результатами численных экспериментов ³¹ (рис. 5).

Для более детальной проверки степенной зависимости τ_D от ω требуются, однако, более точные численные эксперименты.

Интересно отметить, что при увеличении ω , несмотря на понижение порога стохастичности, вероятность ионизации w_D уменьшается.

в) Некоторые особенности диффузионного возбуждения

При больших частотах внешнего поля $\omega \gg \Omega$, как мы видели в гл. 6, теория упрощается, и можно более детально проанализировать характер диффузионного возбуждения и ионизации по сравнению с общим случаем произвольных частот.

Согласно (44) диффузия происходит только для состояний с малыми орбитальными моментами $l \lesssim l_c$. Из гамильтониана (41) можно получить уравнение для изменения l , аналогично тому, как выше было получено уравнение для изменения n . Из него находим, что коэффициент диффузии по l в $(\omega/\Omega)^2$ раз меньше коэффициента диффузии по n . Это приводит к тому, что при больших частотах $\omega \gg \Omega$ диффузия оказывается квазиодномерной, т. е. она происходит только по n . При этом за время диффузионной ионизации τ_D не успевает произойти размешивание по всем орбитальным моментам $0 \leq l \leq l_c$. Отметим, что блуждания электрона по спектру оказываются несимметричными, так как при $n \lesssim n_c = (49\xi\omega^{1/3})^{-1/5}$ резонансы не перекрываются (см. (40)) и поэтому ниже n_c диффузия не идет.

В численных экспериментах ^{22, 26, 31, 36} отмечалось, что процесс диффузии состоит из последовательности быстрых изменений n , происходящих при прохождении перигелия орбиты, и ненакапливающихся малых осцилляций n при движении по остальной части орбиты. Для сильно возбужденных электронов время между моментами прохождения перигелия оказывается очень большим (порядка n^3). Это, по-видимому, приводит к появлению долго неионизирующихся высоковозбужденных траекторий, наблюдаемых в численных экспериментах ^{22, 26}.

При $\omega n^3 \ll 1$ и $\xi \gg \xi_c$ (см. (47)) происходит стохастическое изменение величин n_1, n_2 , что приводит к диффузии по n с экспоненциально малым коэффициентом диффузии

$$D_n \sim \exp\left(-\frac{\Omega}{\Delta\omega}\right),$$

где $\Delta\omega \approx 3\xi^2 n^{5/8}$ (см. ^{32, 42}). Таким образом, в этом случае время ионизации оказывается экспоненциально большим.

г) Квазиклассический расчет времени диффузии

Все предыдущее рассмотрение диффузии основывалось на законах классической механики. В работе ²¹ в рамках квазиклассического приближения квантовой механики было получено диффузионное уравнение типа (50), описывающее блуждание электрона по энергетической оси. Оно основывалось на балансных уравнениях для электрона, находящегося в высоковозбужденном состоянии: под действием внешнего поля происходит большое число однофотонных переходов между соседними уровнями. Приведем в рамках данного подхода выражение для времени диффузии. Для определенности ограничимся областью первого резонанса $\omega = \Omega$. Тогда из каждого состояния n идут переходы в соседние состояния $n \pm 1$. Детальное рассмотрение таких переходов, проведенное в работе ²¹, при-

водит к следующему выражению для времени диффузии:

$$\tau_D \sim \frac{E_n^2}{w\omega^2}, \quad (62)$$

где w — вероятность однофотонного перехода в единицу времени между состояниями с главными квантовыми числами n и $n+1$, определяемая золотым правилом Ферми:

$$w = \frac{\pi}{2} |z_{n'l'm}^{n+1l'm}|^2 \mathcal{E}^2 n^3. \quad (63)$$

Последний фактор n^3 в соотношении (63) представляет собой плотность конечных состояний электрона (см. переход от квазиклассического суммирования к интегрированию в гл. 3). Квазиклассический матричный элемент, входящий в (63), написанный для случая линейно поляризованного поля, вычислялся на основе результатов гл. 2. Усредняем выражение (63) по магнитному квантовому числу m , суммируем по двум значениям $l' = l \pm 1$ в соответствии с дипольными правилами отбора, после чего, подставляя (63) в (62) и полагая $\omega = \Omega$, находим

$$\tau_D \sim \mathcal{E}^{-2} n^{-5}. \quad (64)$$

Это выражение удовлетворительно согласуется с результатом (61).

8. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ДИФфуЗИОННОЙ И КВАНТОВОЙ ИОНИЗАЦИИ

Сначала обсудим условие применимости классической механики, использованной при описании процесса диффузионной ионизации. С точки зрения квантовой механики таким условием является малость поправок к квазиклассической волновой функции электрона в поле остаточного иона и внешнем электромагнитном поле. Важно отметить, что с течением времени эти поправки возрастают³⁸, т. е. точность квазиклассического приближения ухудшается. Обозначим через δ среднюю относительную поправку к квазиклассической волновой функции, соответствующую следующему за наименьшим порядку квазиклассического приближения. Квазиклассическое приближение справедливо, если за время диффузии электрона величина δ остается малой, т. е. выполняется соотношение $\delta \ll 1$. В работах^{39, 40} получена следующая оценка для величины δ :

$$\delta \sim \frac{\gamma_0}{\tau_c} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^{1/2},$$

где $\gamma_0 = 3n^{-4}/2$ есть нелинейность классической системы. При $\omega \approx \Omega \sim \tau_c^{-1}$ время диффузии дается соотношением (64), откуда получаем, что

$$\delta \sim \frac{3}{2} n^{-5} \mathcal{E}^{-1} \ll 1. \quad (65)$$

В частности, в условиях, реализованных в эксперименте⁴¹, при $\mathcal{E}n^4 = 1/12$ из (65) получаем $\delta \sim 18 n^{-1}$, и для $n = 65$ величина $\delta \sim 1/4$, что указывает на применимость классического рассмотрения.

Однако для условий вблизи границы стохастичности (39) из (65) получаем $\delta \sim 120 n^{-1}$, откуда следует, что классическое рассмотрение применимо лишь при $n \gtrsim 120$.

При $k = \omega/\Omega \gg 1$ и $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_c$ время $\tau_c \sim k/\Omega$, откуда для величины δ получаем, следуя³⁹, оценку, отличную от (65):

$$\delta \sim 75 k^{3/2} n^{-1}.$$

Отметим, что это условие оказывается более жестким (если положить $\delta \ll 1$), чем условие $\omega \ll E_n$, лежащее в основе самой постановки вопроса о возможности диффузионной ионизации высоковозбужденного атома.

В тех случаях, когда $\delta \gtrsim 1$, теоретическое описание процесса ионизации сталкивается со значительными трудностями, которые еще не преодолены (см., например, ^{37, 42, 43}). Однако предварительные численные эксперименты ⁴⁴ с простыми квантовыми моделями (не имеющими отношения к процессу ионизации атомов) показывают, что в многомерных системах диффузионное возбуждение имеет место и при $\delta \gg 1$. Вследствие этого диффузионная ионизация атома, по-видимому, будет иметь место и в существенно квантовой области $\delta \gtrsim 1$.

Обратимся теперь к квантовой ионизации, т. е. к туннельной и многофотонной ионизации.

С точки зрения теории прежде всего нужно разделять экспериментальные ситуации на два случая: $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$ и $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$, где $\mathcal{E}_c$ — критическое поле для классической стохастической ионизации (см. гл. 6). В случае $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$ диффузионная ионизация отсутствует. Этот случай соответствует полям, малым по сравнению с характерными атомными полями для рассматриваемых высоковозбужденных уровней. Для таких полей справедлива хорошо известная теория ⁴, согласно которой характер ионизации определяется параметром адиабатичности γ . При $\gamma \ll 1$ имеет место туннелирование, при $\gamma \gg 1$ — многофотонный процесс ионизации, а при $\gamma \sim 1$ — промежуточный случай. Эти утверждения справедливы в отсутствие резонансов между частотой внешнего поля и частотами атомных переходов. При наличии резонанса электрон переходит на вышележащий резонансный уровень, после чего ионизируется с этого уровня согласно тому или иному квантовому механизму, определяемому величиной γ , или диффузионным образом, если для этого уровня $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$.

В противоположном случае более сильного поля $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$ в соответствии с изложенным выше при $E_n \gg \omega \gtrsim \Omega$ имеет место диффузионная ионизация атомов, находящихся в высоковозбужденных состояниях с $n \gg \gg 1$. В этих условиях одновременно с диффузионной ионизацией может происходить и многофотонная ионизация. Между этими процессами есть очевидное качественное различие. Оно заключается в том, что многофотонная ионизация происходит в результате одновременного поглощения атомным электроном нескольких фотонов, в то время как диффузионная ионизация происходит в результате ряда последовательных однофотонных процессов поглощения — испускания. Для выяснения относительной роли этих конкурирующих процессов ионизации необходимо сопоставить соответствующие полные вероятности ионизации за время действия внешнего поля или, что проще, критические напряженности поля.

Обратимся к резонансному случаю, когда $\omega \approx \Omega$. Тогда критическая напряженность линейно поляризованного поля для стохастической неустойчивости атомного электрона дается соотношением (39), а для многофотонной ионизации — соотношением (21). Напомним, что (21) — это атомное поле, при котором вероятность ионизации в $(K_0 + 1)$ -порядке теории возмущений равна вероятности в K_0 -порядке. Ввиду условия $K_0 \gg \gg 1$ зависимость вероятности многофотонной ионизации от напряженности поля очень резкая, практически пороговая. Соответственно, при всех меньших полях, чем $\mathcal{E}_a$, и в том числе при поле $\mathcal{E}_c < \mathcal{E}_a$ квантовый процесс ионизации носит существенно многофотонный характер, и ввиду очень большой величины K_0 вероятность такого процесса исчезающе мала по сравнению с вероятностью диффузионной ионизации, которая представляет собой на квантовом языке совокупность большого числа актов поглощения и излучения фотона. Соответственно, в интервале напряжен-

ности внешнего поля

$$\mathcal{E}_c \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_a$$

имеет место диффузионный процесс ионизации.

Если же в полях с $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_c$ реализуется условие $\omega \ll \Omega$, то диффузионная ионизация практически отсутствует. В этом случае в диапазоне напряженностей полей $\mathcal{E} < \mathcal{E}_a$ (где $\mathcal{E}_a$ определено в гл. 5) имеет место туннельная ионизация, вероятность которой экспоненциально мала и с точностью до фактора $(3 \mathcal{E} n^3 / \pi)^{1/2}$ совпадает с вероятностью туннельной ионизации в постоянном поле (см. гл. 5). Условие применимости такого механизма $(\omega / n \mathcal{E})^2 n \ll 1$ (обсуждаемое в гл. 5) сводится, очевидно, к условию $\omega \ll \mathcal{E} n^{1/2}$. При выполнении более слабого условия $\omega < \mathcal{E} n$ имеет место также туннельная ионизация; однако она протекает различным образом из различных квазиэнергетических состояний n -го терма¹⁹. При $\mathcal{E} > \mathcal{E}_a$ туннельная ионизация переходит в надбарьерный переход электрона, происходящий за характерные атомные времена порядка n^3 .

Рассмотренные ситуации исчерпывают все диапазоны частот ω и напряженностей $\mathcal{E}$ полей, для которых имеют место различные механизмы ионизации высоковозбужденных атомных состояний.

В заключение обратимся к вопросу о численной оценке величины квантового числа $n \gg 1$, начиная с которого может иметь место квазиклассический процесс диффузионной ионизации. Для квазиклассической ионизации, очевидно, необходимо, чтобы не проявлялась дискретная структура атомного спектра и стохастическое блуждание электрона захватывало много уровней. Для этого необходимо, чтобы ширина нелинейного резонанса по n , которая, исходя из (30), по порядку величины равна $n \mathcal{E}^{1/3}$, превышала единицу. Из этого неравенства можно получить оценку на необходимую напряженность поля. Сопоставляя эту оценку с критерием возникновения стохастичности (46), получаем искомое значение главного квантового числа уровня $n > 5$. Как видно, эта величина совсем не очень велика, и квазиклассическая ионизация может иметь место не только для атомов, возбужденных в очень высокие состояния.

9. НАБЛЮДЕНИЕ ПРОЦЕССА НЕЛИНЕЙНОЙ ИОНИЗАЦИИ ВЫСОКОВОЗБУЖДЕННЫХ АТОМОВ

Экспериментальные данные о нелинейной ионизации высоковозбужденных атомов крайне скудны. Однако они не только четко показывают существование самого явления, но и позволяют сделать ряд существенных выводов о его основных свойствах. Прежде чем обратиться к результатам, рассмотрим основные проблемы, возникающие при постановке эксперимента. Она существенно отличается от стандартной постановки эксперимента по нелинейной ионизации атомов, находящихся в основном состоянии, излучением светового диапазона частот⁴⁵.

Постановка эксперимента по нелинейной ионизации высоковозбужденных атомов требует решения двух специфических проблем — создания мишени из атомов, возбужденных в фиксированное состояние с заданным большим главным квантовым числом n , и создания ионизирующего радиочастотного поля.

Обратимся сначала к ионизирующему полю. Речь идет о нелинейных эффектах, реализующихся при частоте внешнего поля $\omega \ll E_n$ при $n \gg 1$. При этом из сказанного выше следует, что особый интерес представляют частоты, близкие к кеплеровой частоте (2). Исходя из (1) и (2) и задаваясь различными большими значениями n , легко оценить, что для ионизации необходимо использовать поля радиочастотного диапазона. Так, например,

для состояния с $n = 50$ энергия связи $E_{50} \approx 5 \cdot 10^{-3}$ эВ, кеплерова частота $\Omega_{50} \approx 50$ ГГц, что соответствует энергии кванта $\hbar\omega \approx 2 \cdot 10^{-4}$ эВ. Таким образом, для резонансного воздействия с классической (кеплеровой) частотой требуется внешнее поле микроволнового диапазона с частотой ω порядка 10 ГГц (т. е. длиной волны порядка 1 см). Исходя из соотношения (39) для порога диффузионной ионизации атома, возбужденного в состояние с $n = 50$, для ионизации необходима напряженность поля $\mathcal{E}_c = 2 \cdot 10^{-9}$ а. е. = 10 В/см, т. е. интенсивность микроволнового излучения $F_c = 0,1$ Вт/см².

Техника получения полей радиочастотного диапазона с заданной метрикой, напряженностью и поляризацией хорошо разработана ⁴⁶. В зависимости от конкретных условий могут быть созданы поля радиочастотного диапазона как в объемных резонаторах, так и в пространстве между антеннами (рупорами) или обкладками плоского конденсатора.

При использовании радиочастотного поля необходимо специально обращать внимание на частоту поля, длину волны излучения, длину пути, которую проходит атом в поле, скорость его движения и спонтанное время жизни атома в возбужденном состоянии. Указанные параметры должны быть в таком соотношении, чтобы за время нахождения атома в поле последнее действовало на атом как переменное поле, а не как постоянное. Наиболее критическим является случай, когда кинетическая энергия атомов велика, а частота поля мала.

Теперь обратимся к проблеме создания высоковозбужденных атомов. Методика получения высоковозбужденных атомов достаточно хорошо разработана.

Первый метод, разработанный наиболее детально, состоит в каскадном возбуждении атомов из основного состояния в заданное высоковозбужденное состояние, используя излучение нескольких лазеров, как правило, лазеров на красителях с изменяемой частотой генерации. Возможности и технические условия реализации этого метода хорошо известны, так как он лежит в основе процесса селективной фотоионизации атомов, имеющего большое практическое значение ^{47, 48}. Используется метод пересечения пучка лазерного излучения и атомарного пучка под углом 90°, что позволяет избавиться от линейного эффекта Доплера. Кроме того, реализуется одночастотный режим генерации лазеров, позволяющий получить экстремально малую ширину спектра излучения до 10^{-3} см⁻¹. Предельно достижимое значение главного квантового числа возбужденного состояния определяется нестабильностью частоты лазерного излучения. В настоящее время достигнута величина $n = 65$ ⁴⁹. Эффективность возбуждения атомов в пучке может быть близка к единице ⁵⁰. Что касается плотности атомарного пучка, то ее величина может достигать величины 10^{13} см⁻³. Отметим, что этот метод ограничивает значения орбитального момента высоковозбужденного атома малыми величинами из-за ограниченного числа каскадов возбуждения.

В принципе, этим методом можно получать высоковозбужденные состояния любых атомов тех веществ, которые в газообразном состоянии (или в виде паров) находятся в атомарном, а не в молекулярном состоянии. Наиболее легко получать атомарные пучки тех веществ, которые характеризуются низкими температурами плавления и испарения, например щелочных металлов.

Второй метод является развитием классического метода перезарядки, широко используемого в физике атомных столкновений. Основное его преимущество — возможность получения высоковозбужденных атомов водорода. Пучок протонов от ускорителя с энергией порядка 10 кэВ рассеивается на газе. В результате перезарядки образуются нейтральные

возбужденные атомы водорода в состояниях с различными значениями главного квантового числа n . Вероятность возбуждения в эти состояния пропорциональна n^{-3} . Вдоль оси пучка возбужденных атомов направляется пучок инфракрасного излучения лазера на CO_2 , энергия кванта которого порядка 0,1 эВ. Эта энергия приблизительно резонансна переходу в спектре атома водорода из состояния с $n = 10$ в состояние с $n = 50$. Точная настройка в резонанс с энергией перехода в определенное состояние с заданным n осуществляется двумя различными методами. В одном случае варьируется энергия ускоренных протонов и, следовательно, энергия возбужденных атомов водорода таким образом, чтобы за счет эффекта Доплера подстроить резонанс между энергией перехода $n = 10 \rightarrow n = 50$ и энергией кванта лазерного излучения^{51, 52}. Результаты работы⁵³ показывают, что таким путем можно четко возбудить отдельные состояния с $n \approx 50$. Селективность данного метода определяется точностью поддержания заданной энергии ускоренных протонов. Отметим, что таким образом можно возбудить лишь состояния с малыми орбитальными моментами.

Этим методом был получен пучок атомов, возбужденных в состояния с $n \approx 50$ с интенсивностью $2,5 \cdot 10^5$ атом/с⁵¹. Следует ожидать, что, оптимизируя условия эксперимента, интенсивность может быть увеличена до 10^{10} атом/с⁵¹.

Другой метод точной подстройки под резонанс заключается в осуществлении штарковского сдвига уровней возбужденного атома в сильном (порядка 10^3 В/см) постоянном электрическом поле⁵⁴. Отметим, что таким образом осуществляются резонансы между состояниями, характеризующимися параболическими квантовыми числами (n, n_1, n_2), т. е. состояниями, в которых представлены различные орбитальные квантовые числа l . Селективность этого метода определяется точностью поддержания высокого напряжения на обкладках конденсатора, создающего постоянное поле. В обоих случаях предельно достижимые значения квантового числа возбужденных состояний определяются также стабильностью частоты и шириной спектра генерации лазера на CO_2 .

Экспериментальные данные, имеющие отношение к процессу нелинейной ионизации высоковозбужденных атомов, содержатся в работах^{14, 41, 53-55}. Обратимся здесь к работе⁴¹, результаты которой представляют наибольший интерес для обсуждаемой проблемы нелинейной ионизации высоковозбужденных атомов.

Схема экспериментальной аппаратуры, использованной в работе⁴¹, приведена на рис. 6. Был осуществлен второй из описанных выше методов создания высоковозбужденных атомов — перезарядка протонов в газе. Пучок протонов с энергией около 11 кэВ перезаряжался на мишени из газа Хе. После прохождения пучка через электростатический фильтр в нем оставались лишь нейтральные атомы, возбужденные в различные состояния. В этом эксперименте не использовалось лазерное излучение для резонансного возбуждения фиксированных высоковозбужденных состояний. Вместо этого осуществлялся разностный эксперимент, в котором состояния с $n > n_c$ отсекались постоянным электрическим полем за счет их надбарьерной ионизации. Использовалось соотношение для критической напряженности постоянного поля $\mathcal{E}_a = C n_c^4$, где величина C определялась из расчетов^{56, 57} и экспериментов^{56, 58}. На основании всей совокупности данных авторы утверждают, что значения n определены ими с точностью ± 5 единиц. Разностным экспериментом выделялся интервал значений n около 5 единиц от $n = 69$ до $n = 63$. Выделенные таким образом атомы, возбужденные в состояния с $n \approx 65$, ионизовывались в переменном поле той или иной частоты и конфигурации. Попеременно исполь-

зовались: поперечное поле с частотой 0,4—1,8 ГГц между параллельными пластинами; аксиальное поле моды TM_{01} резонатора на частоте 9,9 ГГц; электростатическая линза Эйнзеля, позволявшая получать поле с основной частотой около 30 МГц. Сопоставление скорости движения возбужденных атомов и линейных размеров поля на частоте 30 МГц (λ порядка 10 м) показывает, что действие поля в этом случае было эквивалентно действию постоянного поля. Протоны, образованные в результате ионизации высоко-возбужденных атомов, регистрировались с помощью цилиндра Фарадея.

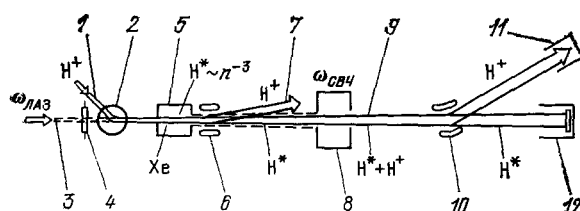


Рис. 6. Схема экспериментальной аппаратуры работы ⁴¹.

1 — пучок ускоренных ионов H^+ ; 2, 6, 10 — отклоняющие магниты; 3 — пучок лазерного излучения; 4 — окно вакуумной камеры; 5 — камера перезарядки H^+ на χ_e ; 7 — выделенный пучок ионов H^+ ; 8 — камера ионизации СВЧ полем; 9 — пучок $H^* + H^+$ 11 — детектор ионов H^+ , 12 — детектор возбужденных атомов H^* Описание см. в тексте

Результаты эксперимента ⁴¹ в виде зависимости амплитуды сигнала протонов, зарегистрированных цилиндром Фарадея, от напряженности радиочастотного поля приведены на рис. 7. Данные для различных частот ионизирующего поля нормированы по насыщению ионного сигнала. Каждая кривая представляет собой зависимость вероятности ионизации атомов водорода, возбужденных в состояние с $n \approx 65$, от напряженности поля.

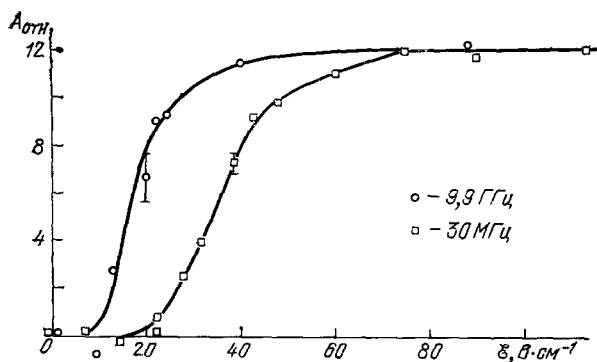


Рис. 7. Амплитуда сигнала протонов в относительных единицах в зависимости от напряженности поля $\mathcal{E}$ (результаты эксперимента ⁴¹).

Для данных, полученных при фиксированной частоте излучения, можно ввести величину критической напряженности поля $\mathcal{E}_a$, соответствующую амплитуде сигнала, равной половине максимальной амплитуды. Полученные таким образом величины $\mathcal{E}_a$ можно выразить в виде соотношения

$$\mathcal{E}_a \approx \frac{1}{Cn^4},$$

где зависящая от частоты поля величина C определяется из экспериментальных данных. Для частоты поля $\omega = 9,9$ ГГц, 1,5 ГГц и 30 МГц найдено, что C равно соответственно 25, 17 и 8. Таким образом, в указанном диапазоне частот критическое поле уменьшается по мере увеличения частоты ионизирующего поля.

Для того чтобы сделать какие-либо утверждения о характере процессов ионизации, надо сопоставить данные эксперимента (частоты и критические напряженности поля) с данными теории о критических полях и их

зависимости от частоты излучения. Такое сопоставление будет проведено в следующей главе.

Обратимся теперь к ионизации высоковозбужденных состояний атома водорода, наблюдаемой в эксперименте ⁵³. Пучок протонов с энергией около 11 кэВ перезаряжался на мишени из газа Хе. Далее, лазерным излучением осуществлялся однофотонный переход из низковозбужденных состояний атома водорода в состояния с $n = 45-57$. Микроволновое поле с частотой в диапазоне от 9,4 до 11,6 ГГц воздействовало на атомы в этих состояниях, после чего атомы ионизовались. Было обнаружено, что при изменении частоты микроволнового поля выход ионов носил резонансный характер как функция этой частоты. Авторы работы ⁵³ связывали эти резонансы с возникновением при определенных частотах ω условия $k\omega = \Omega$ (кеплерова частота Ω равна расстоянию между соседними высоковозбужденными уровнями); здесь $k = 2, 3, 4$. Так как кеплерова частота Ω меняется при изменении n , то и положение резонансов оказывается различным для различных n при фиксированном k . Таким образом, здесь мы имеем дело с многофотонным резонансом между соседними высоковозбужденными уровнями атома водорода. Факт наблюдения резонансов с точки зрения теории представляется нетривиальным, так как, на первый взгляд, поскольку в условиях эксперимента характерное линейное штарковское расщепление $n^2 \mathcal{E}$ в 3 раза больше Ω и в 10—15 раз больше ω , то не должно быть вообще никаких резонансов. Авторы работы ⁵³ подчеркивают, что резонансов не должно быть также и вследствие условия $\gamma \sim 1$ для характерных экспериментальных величин, которое согласно общей теории ⁴ препятствует многофотонному процессу поглощения фотонов радиочастотного поля. Таким образом, задача теории состоит в объяснении причины возникновения резонансов в выходе ионов.

10. СОПОСТАВЛЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

В эксперименте ⁵³ наблюдалась ионизация высоковозбужденных атомов в условиях, когда частота внешнего поля была в несколько раз (в ≈ 5 раз) меньше кеплеровой частоты, так что можно с достаточным основанием утверждать, что классическая ионизация в этом эксперименте отсутствует. Величина параметра адиабатичности для $\omega = 10$ ГГц и $n = 45$ составляет $\gamma = 3$. Таким образом, в условиях этого эксперимента имеет место многофотонный процесс ионизации. Однако, разумеется, поглощение фотонов происходит не до границы непрерывного спектра, так как в таком случае вероятность многофотонной ионизации была бы ничтожно мала (см. гл. 4). Скорее всего, поглощается 5—10 фотонов, после чего внешнее поле становится атомным или $\sim \mathcal{E}_c$ для соответствующих n . В соответствии с этим, полагая $n = 60$ и $\mathcal{E} = 75$ В/см, можно получить, что эти величины удовлетворяют соотношению $\mathcal{E} = 1/5n^4$. Такая оценка критического поля для многофотонного процесса ионизации разумно согласуется с (21).

В соответствии с условиями возбуждения рассматриваемые состояния обладают малыми орбитальными моментами, т. е. приблизительно сферически симметричны. В параболических переменных это означает, что $n_1 \approx n_2$ (при $n_1 > n_2$ вероятность нахождения частицы на стороне $z > 0$ больше, чем на стороне $z < 0$, а при $n_1 < n_2$ — наоборот). Следовательно, линейный сдвиг Штарка в указанном низкочастотном поле, пропорциональный $(n_1 - n_2)$, практически отсутствует. Из-за переменности поля правильнее было бы говорить не о линейном сдвиге Штарка, а о заселении квазиэнергетических состояний для соответствующих квазиэнергетических гармоник, но это не меняет сделанного выше заключения. Что касается

квадратичного эффекта Штарка, то, согласно результатам гл. 3, он для малых орбитальных моментов имеет оценку $0,15n^6 \mathcal{E}^2$. Для указанных выше полей и значений n получаем сдвиг порядка $(1/40) \Omega$. Кроме того, он почти одинаков для соседних уровней, так что разность их энергий остается практически невозмущенной. Это и приводит к наблюдаемому экспериментально факту резонансов, когда кеплерова частота кратна частоте микроволнового поля.

Теперь обратимся к анализу эксперимента ⁴¹. Здесь величины n были значительно больше, а именно, $n \approx 65$. Для таких значений радио-частотное поле с частотой $\omega \approx 10$ ГГц, т. е. с $\omega \approx 0,43\Omega$, оказывается

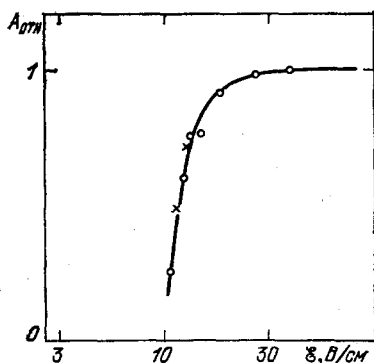


Рис. 8. Амплитуда сигнала протонов (относительные единицы) в эксперименте ⁴¹ в зависимости от напряженности поля $\mathcal{E}$ для $n = 65$.

Кружки соответствуют экспериментальным данным, крестики — данным численного расчета ²². Частота поля $\omega = 9,9$ ГГц (экспериментальные значения соответствуют кривой, маркированной *, на рис. 7).

по напряженности выше порога стохастической ионизации (39). Ионизация наблюдалась в полях $\mathcal{E} > 10$ В/см, что согласуется с оценкой по (39); $\mathcal{E}_c \approx 5$ В/см. На рис. 8 представлены экспериментальные данные ⁴¹ и данные численного расчета ²² для доли ионизованных частиц как функции $\mathcal{E}$. Видно их хорошее согласие. В этих квазирезонансных условиях конкурировать с диффузионной ионизацией может лишь многофотонная ионизация. Однако напряженность поля, при которой наблюдалась ионизация, значительно меньше критической напряженности поля для многофотонной ионизации (21), которая в данном случае порядка 50 В/см, так что многофотонная ионизация описывается степенным законом, а вероятность ее в данном случае, оцененная по соотношениям, приведенным в гл. 4, оказывается малой.

В целом результаты этого сопоставления не противоречат предположению, что данный эксперимент есть пока единст-

венный пример стохастической неустойчивости высоковозбужденного атома и наблюдения диффузионной ионизации высоковозбужденного атома.

Проанализируем теперь с точки зрения теории данные эксперимента ⁴¹ для частоты поля $\omega = 30$ МГц (см. рис. 7). Отметим, что это значение в 10^3 раз меньше кеплеровой частоты Ω , так что, конечно, не может быть и речи о стохастической ионизации. В этом случае ионизация производится практически постоянным полем и заключается в надбарьерном прохождении электроном потенциального барьера. В соответствии с общей теорией (см. ¹ и гл. 5) надбарьерный переход электрона происходит при атомных полях, описываемых формулой (26). Экспериментально ионизация происходила при напряженности поля $\mathcal{E} \approx 1/8n^4 = 30$ В/см, что разумно согласуется с оценкой (26).

Случай частоты $\omega = 1,5$ ГГц, когда $\gamma \sim 1$, является промежуточным между многофотонным и туннельным случаями квантовой ионизации. Экспериментальное значение напряженности поля, при которой происходит ионизация на такой частоте, как мы видели в гл. 8, также является промежуточной. Так как при этом $\omega = 0,065\Omega$, а $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$, то ситуация ближе к надбарьерному переходу электрона, затрудненному тем обстоятельством, что поле все же не является постоянным.

Резюмируя, можно утверждать, что сопоставление результатов экспериментов с высоковозбужденными атомами водорода, результатов числен-

ных экспериментов на ЭВМ и выводов, следующих из аналитического описания процесса ионизации высоковозбужденных атомов, показывает их качественное и количественное согласие. Тем самым подтверждается существование нового, квазиклассического процесса диффузионной ионизации высоковозбужденных атомов. Однако надо отметить, что пока не выполнен эксперимент, который однозначно указывал бы на диффузионный характер процесса ионизации. Такой эксперимент не прост, но в принципе возможен. В качестве примера укажем на измерения зависимости выхода ионов от длительности воздействия внешнего поля. В случае многофотонной ионизации, когда выход ионов характеризуется величиной вероятности ионизации в единицу времени, выход прямо пропорционален длительности действия внешнего поля. В случае диффузионной ионизации, очевидно, такая зависимость не имеет места.

Другой возможный способ однозначного экспериментального подтверждения реализации диффузионной ионизации заключается во введении частотной модуляции внешнего поля: $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} \cos(\omega t + \lambda \sin \omega_m t)$. В случае, когда $\omega \sim \Omega$ и $\lambda \omega_m \geq \omega/3$, глубина модуляции того же порядка, как и расстояние между резонансами $\Delta\Omega = \omega/2$. Поэтому для возникновения диффузионной ионизации требуется, чтобы перекрылись гораздо более близкие, модуляционные резонансы с $\Delta\Omega = \omega_m \ll \omega$, так как мы полагаем $\lambda \gg 1$. Таким образом, введение модуляции внешнего поля приводит к понижению критического поля (46) для диффузионного возбуждения в $\lambda^{3/2}$ раз. Так, например, при $n = 65$, $\omega/2\pi = 20$ ГГц, $\omega_m/2\pi = 1,1$ ГГц, $\lambda = 6$ $\mathcal{E}_c \approx (84n^4\lambda^{3/2})^{-1} \approx 0,2$ В·см⁻¹. Коэффициент диффузии при этом по-прежнему дается выражением (56). Введение модуляции внешнего поля слабо изменяет степень многофотонности процесса ионизации, так как максимальная частота возмущающего поля увеличивается всего на 30%. Соответственно и критическое поле для процесса многофотонной ионизации изменится слабо.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хорошо известно, что в общем случае взаимодействие внешнего электромагнитного поля с атомом носит существенно квантовый характер. Проведенное выше рассмотрение взаимодействия с высоковозбужденным атомом показало, что в этом частном случае оно носит квазиклассический характер. Использование классической механики позволило описать новый механизм ионизации высоковозбужденного атома, не имеющий аналога в случае многофотонной и туннельной ионизации. Анализ классических уравнений движения показывает, что при определенных условиях динамика атомного электрона во внешнем поле оказывается стохастической (хотя внешние случайные воздействия отсутствуют). Вследствие этого происходит диффузия электрона по энергетической шкале, приводящая к ионизации атома. Отметим еще раз качественное отличие диффузионного процесса ионизации от квантовых процессов ионизации — фотоионизации, многофотонной и туннельной нелинейной ионизации. Вне зависимости от конкретного механизма процесс квантовой ионизации всегда состоит в одном переходе электрона из начального связанного в конечное свободное состояние. В противоположность этому диффузионная ионизация представляет собой большое число переходов электрона со случайным по знаку и величине изменением его энергии. Поэтому, в частности, для описания квантовой ионизации применимо понятие вероятности в единицу времени, а диффузионная ионизация может быть описана лишь в терминах полной вероятности.

Численные эксперименты, в которых на ЭВМ моделировался процесс диффузионной ионизации высоковозбужденного атома, дали результаты, хорошо согласующиеся с аналитическим описанием этого процесса. Что касается реальных экспериментов, то их крайне мало. Результаты того единственного эксперимента ⁴¹, условия проведения которого соответствуют условиям реализации диффузионной ионизации, хорошо согласуются с предсказаниями теории. Однако решающий эксперимент, позволяющий однозначно утверждать, что наблюдается диффузионная, а не квантовая ионизация, пока не выполнен. Проведение подобного эксперимента представляет интерес в первую очередь для разрешения проблемы ионизации высоковозбужденных атомов. Однако интерес к такому эксперименту выходит за рамки этой проблемы, так как высоковозбужденный атом представляет собой одну из реальных моделей, в которой могут проявляться особенности динамики квантовых систем, стохастических в классическом пределе.

Хотя основной интерес представляют в данное время эксперименты с высоковозбужденными атомами, однако можно указать на ряд важных вопросов, на которые пока теория не дает ответа.

Вопрос, остающийся пока открытым, — это описание надбарьерной ионизации в переменном поле. При надбарьерной ионизации (как и в случае туннельной ионизации) отличие переменного поля от постоянного заключается в изменении барьера во времени. По аналогии с туннельным эффектом следует предполагать, что условия реализации надбарьерной ионизации должны определяться не только напряженностью поля (высотой барьера), но также и частотой поля.

Если теперь обратиться к диффузионной ионизации, то, пожалуй, наиболее принципиальным является вопрос о роли квантовых поправок к классической теории стохастического возбуждения атомного электрона и его диффузии по энергетической шкале. Следует обратить внимание на то, что с течением времени квантовые поправки могут привести к кардинальным изменениям в динамике системы (см., например, ³⁷).

Что касается традиционных рамок описания диффузионной ионизации, то желательно продолжение и развитие численных экспериментов с целью получить данные о вероятности диффузионной ионизации в более широком диапазоне частот, для меньших напряженностей полей, а также данные о границе возникновения стохастического возбуждения атомного электрона.

Возникает естественный вопрос, в какой мере рассмотренные явления имеют место не только для атомов, но также и для высоковозбужденных молекул? Что касается молекул, находящихся в высоковозбужденном электронном состоянии, то не вызывает сомнений, что к ним в полной мере относится все сказанное выше по поводу высоковозбужденных атомов. Однако прямые экспериментальные результаты для этого случая отсутствуют. Аналогичные явления могут иметь место и для молекул, возбужденных в высокие колебательные состояния. Наибольший практический интерес представляет возбуждение колебательных уровней сложных молекул инфракрасным полем лазерного излучения, приводящее к диссоциации молекул ^{59, 60}. На возможность диссоциации молекулы за счет ее стохастической неустойчивости и диффузионного возбуждения указано в работах ^{61, 62}. В работе ⁶² приведена величина критического поля для ряда сложных колебательно-возбужденных молекул. Теоретические оценки критического поля удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов ^{59, 60}. Нельзя сказать, что стохастическая неустойчивость и диффузионное возбуждение молекулы являются сейчас общепринятым объяснением процесса диссоциации молекул инфракрасным лазерным

излучением ⁵⁹, ⁶⁰. Можно, например, отметить работу ⁶³, в которой возбуждение высоких колебательных состояний многоатомной молекулы в инфракрасном поле для определенной модели молекулярного спектра описано в рамках квантовой механики. Общая ситуация в случае молекул такая же, как и в случае атомов: квазиклассический процесс стохастической неустойчивости и диффузионного возбуждения объясняет экспериментальные данные, но существуют и иные альтернативные объяснения.

Наконец, поскольку качественно описанные выше явления не зависят от конкретного вида потенциала, то представляет интерес провести исследование и внешнего многоквантового фотоэффекта. С точки зрения теории этот случай представляет особый интерес, так как потенциал носит одномерный характер, что существенно упрощает как аналитические расчеты, так и численное моделирование ⁶⁴.

Резюмируя ситуацию в целом, можно утверждать, что исследование процесса возмущения ионизации возбужденных атомов в низкочастотных полях по-прежнему представляет собой многообещающее поле деятельности как для экспериментаторов, так и для теоретиков.

Примечание при корректуре. Результаты эксперимента, в котором наблюдался квадратичный по полю сдвиг 22Р-состояния атома Rb, сообщены в работе ⁶⁵.

Институт общей физики АН СССР
Московский инженерно-физический институт
Институт ядерной физики
СО АН СССР, Новосибирск

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Б. М. Высоковозбужденные атомы. — М.: Энергоиздат, 1982.
2. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. — М.: Атомиздат, 1978.
3. Рапопорт Л. П., Зон Б. А., Манаков Н. Л. Теория многофотонных процессов в атомах. — М.: Атомиздат, 1978.
4. Келдыш Л. В. — ЖЭТФ, 1964, т. 45, с. 1945.
5. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1980. — С. 223.
6. Гореславский С. П., Делоне Н. Б., Крайнов В. П. — ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 1789; Препринт ФИАН СССР № 33. — Москва, 1982.
7. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — М.: ИЛ, 1960.
8. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Препринт ФИАН СССР № 18. — Москва, 1979.
9. Давыдкин В. А., Зон Б. А. — Опт. и спектр., 1982, т. 52, с. 600.
10. Давыдкин В. А., Макаренко А. Ю. — Ibid., т. 53, с. 533.
11. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. — ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 1980.
12. Bayfield J. — Phys. Rept., 1979, v. 51, p. 318.
13. Koch R. M. Postdeadline Paper submitted to the Intern. Conference On Multiphoton Processes. — Rochester; N.Y., 1977.
14. Bayfield J., Gardner L., Gulkok Y., Sharma D. — Phys. Rev. Ser. A, 1981, v. 24, p. 138.
15. Делоне Н. Б., Крайнов В. П., Препринт ФИАН СССР № 15. — Москва, 1983.
16. Берсон И. Я. — ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 1286.
17. Делоне Н. Б., Иванов М. Ю., Крайнов В. П., Препринт ФИАН СССР № 42. — Москва, 1983.
18. Смирнов Б. М., Чибисов М. И. — ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 841.
19. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1981, т. 45, с. 2306.
20. Чириков Б. В. — АЭ, 1959, т. 6, с. 630.
21. Делоне Н. Б., Зон Б. А., Крайнов В. П. — ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 445.
22. Leopold J. G., Percival I. C. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 41, p. 944.
23. Меерсон Б. И., Окс Е. А., Сасоров П. В. — Письма ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 79.
24. Заславский Г. М., Чириков Б. В. — УФН, 1971, т. 105, с. 3.
25. Chirikov B. V. — Phys. Rept., 1979, v. 52, p. 263.

26. Mostowski J., Sanchez-Mondragon J. J.— *Optics Comm.*, 1979, v. 29, p. 293.
27. Меерсон Б. И.— *Опт. и спектр.*, 1981, т. 51, с. 582.
28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— 6-е изд., испр. и доп.— М.: Наука, 1973.— Формула (70.7).
29. Чириков Б. В.— *Природа*, 1982, № 7, с. 15.
30. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.— *Механика*.— 3-е изд., испр. и доп.— М.: Наука, 1973.
31. Jones D. A., Leopold J. G., Percival I. C.— *J. Phys. Ser. B*, 1980, v. 13, p. 31.
32. Шепелянский Д. Л.— *Опт. и спектр.*, 1982, с. 52, с. 1102.
33. Коварский В. А. Многоквантовые переходы.— Кишинев: Штиинца, 1974.
34. Чириков Б. В. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 267.— Новосибирск, 1969.
35. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.— *ЖТФ*, 1982, т. 52, с. 238.
36. Leopold J. G., Percival I. C.— *J. Phys. Ser. B*, 1979, v. 12, p. 709.
37. Casati G., Chirikov B., Ford J., Izrailev F.— *Lecture Note in Physics*. V. 93.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979.
38. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
39. Шепелянский Д. Л.— *ДАН СССР*, 1981, т. 256, с. 586.
40. Шепелянский Д. Л.— *Опт. и спектр.*, 1982, т. 53, с. 354.
41. Bayfield J., Koch P.— *Phys. Rev. Lett.*, 1974, v. 33, p. 258.
42. Chirikov B., Izrailev F., Shepelyansky D.— *Soviet Sci. Rev.*, 1981, v. 2C, p. 209.
43. Zaslavsky G. M.— *Phys. Rept.*, 1981, v. 80, p. 157.
44. Шепелянский Д. Л. Препринт ИЯФ СО АН СССР 81-55.— Новосибирск, 1981.
45. Делоне Н. Б.— *УФН*, 1975, т. 115, с. 361.
46. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и волноводы.— М.: Наука, 1966.
47. Летохов В. С., Мур С. Б.— *Квант. электрон.*, 1976, т. 3, с. 248.
48. Летохов В. С., Мишин В. И., Пурецкий А. А.— В кн. *Химия плазмы*.— М.: Атомиздат, 1977.— Вып. 4, с. 3.
49. Tuan D., Liberman S., Pinard J.— *Optics Comm.*, 1976, v. 18, p. 533.
50. Амбарцумян Р. Н., Апатин В. М., Летохов В. С. и др.— *ЖЭТФ*, 1976, т. 70, с. 1660.
51. Bayfield J.— *Rev. Sci. Instr.*, 1976, v. 47, p. 1450.
52. Koch P.— *Optics Comm.*, 1977, v. 20, p. 115.
53. Bayfield J., Gardner L., Koch P.— *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v. 39, p. 76.
54. Koch P. M.— *Phys. Rev. Lett.*, 1978, v. 41, p. 99.
55. Bayfield J.— In: *Multiphoton Processes*.— N.Y.: J. Wiley, 1978.— p. 191.
56. Bayfield J., Khayrallah G., Koch P.— *Phys. Rev. Ser. A*, 1974, v. 9, p. 209.
57. Bayley D., Hiskes J., Riviere A.— *Nucl. Fusion*, 1965, v. 5, p. 41.
58. Ильин Р. Н., Киккани Б. И., Опарин В. А. и др.— *ЖЭТФ*, 1964, т. 47, с. 1234.
59. Карлов Н. В., Прохоров А. М.— *УФН*, 1976, т. 118, с. 583.
60. Летохов В. С., Мур С. Б.— *Квант. электрон.*, 1976, т. 3, с. 243, с. 485.
61. Шурык Э. В.— *ЖЭТФ*, 1976, т. 71, с. 2039.
62. Шурык Э. В.— *Квант. электрон.*, 1978, т. 5, с. 1796.
63. Акулин В. М., Дыхне А. М.— *ЖЭТФ*, 1977, т. 73, с. 2098.
64. Jensen R.— *Phys. Rev. Lett.*, 1982, v. 49, p. 1365.
65. Liberman S., Pinard J., Taleb A.— *Phys. Rev. Lett.*, 1983, v. 50, p. 838.